

## Diseño y modelado de un motor de cd con variación de resistencia de campo para regular la velocidad

### Design and modeling of a cd motor with field resistance variation to regulate the speed

MARTÍNEZ-CARRILLO, Irma†\*, JUÁREZ-TOLEDO, Carlos y CAMACHO-ALTAMIRANO, Ulices

*Universidad Autónoma del Estado de México*

ID 1<sup>er</sup> Autor: *Irma, Martínez-Carrillo* / ORC ID: 0000-0002-7952-4418, Researcher ID Thomson: B-9264-2016, CVU CONACYT ID: 39914

ID 1<sup>er</sup> Coautor: *Carlos, Juárez-Toledo* / ORC ID: 0000-0002-1683-4080, Researcher ID Thomson: F-9514-2018, CVU CONACYT ID: 786771

ID 2<sup>do</sup> Coautor: *Ulices, Camacho-Altamirano* / ORC ID: 0000-0002-4902-6936, Researcher ID Thomson: G-1804-2018, CVU CONACYT ID: 784595

DOI: 10.35429/JTIP.2019.9.3.1.7

Recibido 03 de Octubre, 2019; Aceptado 11 Diciembre, 2019

#### Resumen

El ahorro de energía y la implementación de las nuevas tecnologías en diversas áreas de la industria han generado la evolución de los procesos industriales. El objetivo es este trabajo es conocer la aportación de información de motor de corriente directa (cd) en su forma reducida comparada con el modelo completo a través de la variación de la resistencia de campo. El método propuesto consiste en obtener el modelo en espacio de estados de ambos modelos, para conocer la respuesta en el tiempo a través del toolbox de soluciones de ecuaciones diferenciales (ODE) de Matlab. A partir de la información obtenida se utiliza el método de integración numérica para conocer la posición del rotor con respecto al tiempo y el plano de fase para saber sobre la estabilidad del motor ante la variación de la resistencia de campo, principalmente en periodos cortos correspondientes al arranque.

**Motor de cd controlado en el campo, Variación de la resistencia de campo, Sistema reducido, Espacio de estados, Integración numérica, Plano de fase**

#### Abstract

Energy saving and the new technologies implementation in many areas of the industry have developed the evolution of industrial processes. The objective of this work is to investigate the effects and differences of the direct current motor reduce model versus complete model using the field resistance for speed control. The proposed method obtains the state-space model of both systems by means of the differential equation solutions toolbox of Matlab (ODE). The numerical integration method is used to know the position of the rotor in the time and the phase plane to know about the stability of the motor before the variation of the field resistance, mainly in short periods corresponding to the start. The phase plane is applied to identify the stability of the motor affected for the field resistance variation; this study is mainly carried out in short periods of startup

**CD motor with field control, Variation of field resistance, Reduced dynamic model, Complete dynamic model, Phase plane**

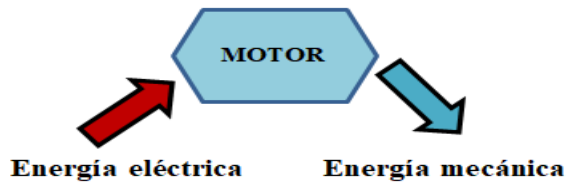
**Citación:** MARTÍNEZ-CARRILLO, Irma, JUÁREZ-TOLEDO, Carlos y CAMACHO-ALTAMIRANO, Ulices. Estudio de la interacción de luz con sustancias con alto contenido de sacarosa y fructuosa. Diseño y modelado de un motor de cd con variación de resistencia de campo para regular la velocidad. 2019 3-9: 1-7

\* Correspondencia del Autor (Correo electrónico: imartinezca@uaemex.mx)

† Investigador contribuyendo como primer autor.

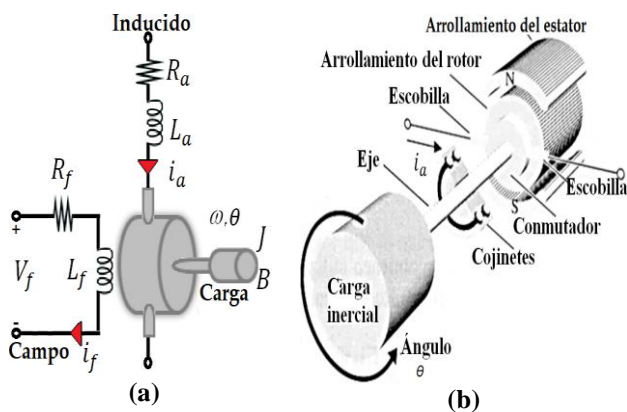
## Introducción

Un motor de cd es una maquina eléctrica rotatoria que transforma la energía eléctrica en energía mecánica como se muestra en la figura 1.



**Figura 1** Transformación de energía del motor de cd  
Fuente: J. G. Pérez, 2013

La representación esquemática de un motor de cd controlado en el campo se muestra en la figura 2.



**Figura 2** (a) Motor de cd controlado en el campo. (b) actuador rotacional  
Fuente: R. C. Dorf, 2008

El comportamiento dinámico del motor de la figura 2, está representado por un conjunto de ecuaciones diferenciales y algebraicas de la forma (K. Ogata, 2003), (M. E. P. Morales, 2019):

$$R_f i_f + L_f \frac{di_f}{dt} - V_f = 0 \quad (1)$$

$$R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + V_e - V_a \quad (2)$$

$$V_e = K_{re} i_f \omega \quad (3)$$

$$T_m = K_{re} i_f i_a \quad (4)$$

$$T_m - T_d = J \frac{d\omega}{dt} + B \omega \quad (5)$$

Donde:

$R_f$ : resistencia de campo en ohms ( $\Omega$ )

$L_f$ : inductancia de campo en henrios (H)

$i_f$ : corriente de campo en amperes (A)

$V_f$ : tensión del campo en volts (V)

$R_a$ : resistencia de inducido en  $\Omega$

$L_a$ : inductancia de armadura en henrios (H)

$i_a$ : corriente de inducido en amperes (A)

$V_e$ : tensión de armadura en volts (V)

$\omega$ : velocidad angular en  $rad/seg$

$T_m$ : par del motor en N.m

$K_{re}$ : constante de relación rotor y estator

$T_d$ : es el par de perturbación en N.m

$J$ : Momento de inercia en  $k.m^2$

$B$ : Coeficiente de fricción  $Nm/rad$

Sustituyendo la ecuación (3) en (2) y (4) en la ecuación (5) resulta:

$$R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + K_{re} i_f \omega - V_a \quad (6)$$

$$K_{re} i_f i_a - T_d = J \frac{d\omega}{dt} + B \omega \quad (7)$$

En estudios convencionales usualmente se considera  $i_f$  constante (J. A. Somolinos, 2002), (R. M. Macías, 2019) si la corriente fuera así, entonces la ecuación (1) establece que la tensión de campo es proporcional al voltaje de la resistencia de campo  $V_f = R_f i_f$  y  $K_{re} i_f = k$  y que además  $T_d = 0$ , por lo tanto de las ecuaciones (6) y (7) se puede obtener la representación en espacios de estado con  $x \in R^2 \exists x = [x_1 \ x_2]^T = [i_a \ \omega]^T$  y  $u = V_a$  entonces:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{k}{L_a} \\ \frac{k}{J} & -\frac{B}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (8)$$

Con  $u$  la señal de entrada y  $x$  el vector de señales de salida.

Como puede observarse de la ecuación (8) al suponer una corriente de campo constante, el comportamiento del sistema se puede representar como un sistema en espacio de estados de la forma  $\dot{x} = Ax + Bu$  la cual tiene una fácil solución en el tiempo.

En la literatura diversos autores han establecido que para tiempos  $t \gg 0$  la corriente de campo  $i_f$  es constante (D. E. Rodas, 2006) con relación:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} i_f = \frac{V_f}{R_f} \quad (9)$$

A continuación, se presenta un modelo completo en el cual se considera a la corriente de campo como una variable dentro del comportamiento del sistema de estudio.

**Representación completa del motor de cd**

La representación completa del sistema está dada por las ecuaciones diferenciales (1), (6) y (7) con  $x \in R^3 \exists x = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T = [i_f \ i_a \ \omega]^T$ , dado que el sistema contiene parámetros de segundo orden el sistema puede reescribirse como un sistema no lineal de la forma (I. Martínez, 2004):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_f}{L_f} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{R_a}{L_a} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{B}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x^T H_2^1 x \\ x^T H_2^2 x \\ x^T H_2^3 x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_f} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_a} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_f \\ V_a \\ T_d \end{bmatrix} \quad (10)$$

Donde

$$H_2^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, H_2^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{K_{re}}{L_a} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ y} \quad (11)$$

$$H_2^3 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{K_{re}}{J} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La respuesta de salida en el tiempo para el sistema simplificado ( $i_a, \omega$ ) de la ecuación (8) y para el sistema completo ( $i_f, i_a, \omega$ ) de la ecuación (10) se utilizará la librería de solución de ecuaciones diferenciales ordinarias de Matlab. Puesto que en ambos casos se tiene la velocidad angular  $\omega$  se aplicará el método de integración trapezoidal para obtener:

$$\theta = \int_a^b \omega(t) dt \quad (12)$$

como a continuación se describe.

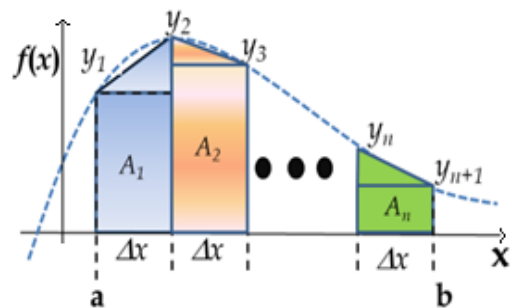
**Integración trapezoidal**

El método del trapecio reemplaza un conjunto de puntos generados por una función  $f(x)$  por una función discreta  $f_n(x)$  en un intervalo de interés  $[a, b]$  (A, Gilat, 2006).

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b f_n(x) dx \quad (12)$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b y_1(x) dx$$

Es decir, una aproximación del área bajo la curva de  $f(x)$  se obtiene dividiendo en  $n$  franjas de ancho la abscisa de la función de interés y aproximando cada una de las franjas a un trapecio como se muestra en la figura 3.



**Figura 3** función discreta  $f(x)$  en  $n$  intervalos iguales  
Fuente: I. Hernandez, 2015

En la función  $f(x)$  de la figura 2 se observa que cada área  $A_n$  se compone de dos áreas (rectangular y triangular), además la suma de las  $A_n$  áreas es aproximadamente el área de la integral algebraica  $f(x)$ . Es decir, el método del trapecio establece un conjunto de  $n$  áreas de la forma:

$$A_1 = y_1 \Delta x + \frac{(y_2 - y_1) \Delta x}{2} = \frac{\Delta x (y_1 + y_2)}{2} \quad (13)$$

↓
↓  
 Área rectangular      Área triangular

De forma similar para las áreas siguientes:

$$A_2 = \frac{\Delta x (y_2 + y_3)}{2}$$

$$A_3 = \frac{\Delta x (y_3 + y_4)}{2}$$

⋮

$$A_n = \frac{\Delta x (y_n + y_{n+1})}{2}$$

Sumando las áreas individuales resulta

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{\Delta x}{2} (y_1 + 2y_2 + 2y_3 + \dots + 2y_n + y_{n+1}) \quad (14)$$

Es el área bajo la curva para obtener una aproximación de la curva de posición angular de la ecuación (12).

**Resultados**

Los datos de prueba para el motor de cd reducido y completo de las ecuaciones (8) y (10) correspondientes a la figura 2 se muestran en la tabla 1 y la tabla 2.

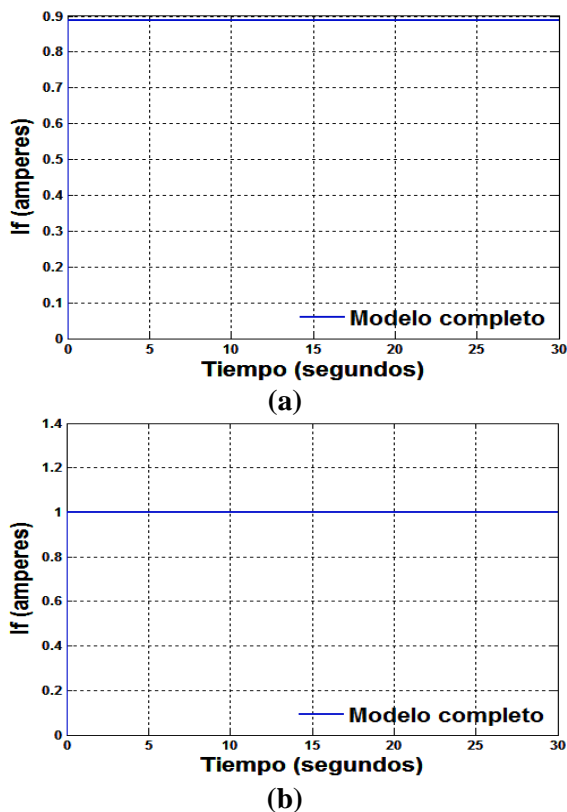
Elemento	Valor
$V_a$	5V
$L_a$	0.5
$R_a$	1.5
$K_{re}$	0.08
$T_{carga}$	0
$B$	0.05

**Tabla 1** Parámetros del modelo reducido

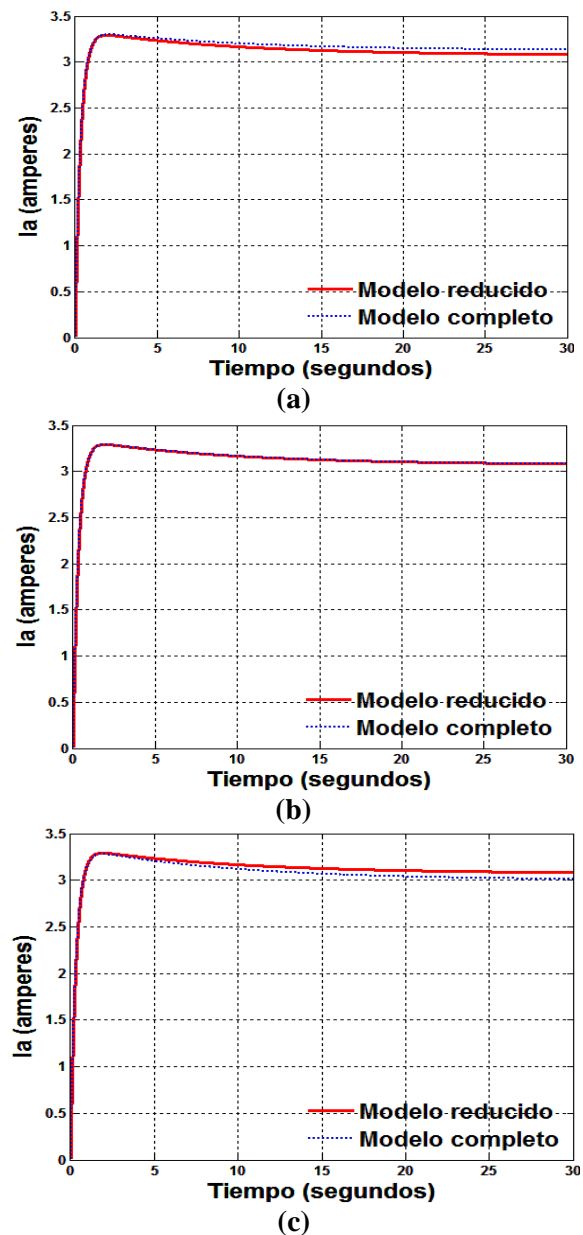
Elemento	Valor
$V_a$	5V
$L_a$	0.5
$R_a$	1.5
$K_{re}$	0.08
$T_{carga}$	0
$B$	0.05
$V_f$	8V
$L_f$	0.05
$R_f$	8

**Tabla 2** Parámetros del modelo completo

Para los valores de la tabla 1 y 2, y la solución de ecuaciones diferenciales de (8) y (9) a través del toolbox de Matlab (ode23) las respuestas de salida se muestran en los gráficos 1 al 3.



**Gráfico 1** Corriente de campo para  $R_f = 9, 8$  y  $7\Omega$



**Gráfico 2** Corriente de inducido  $R_f = 9, 8$  y  $7\Omega$

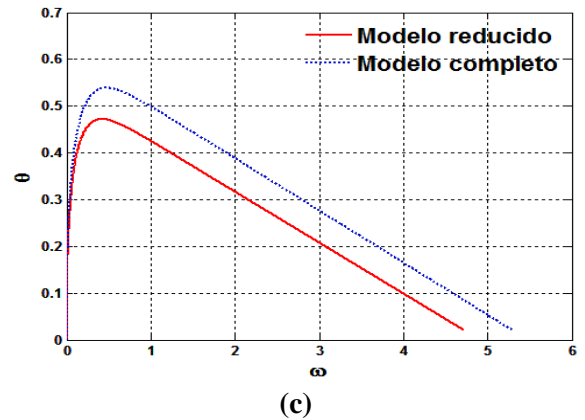
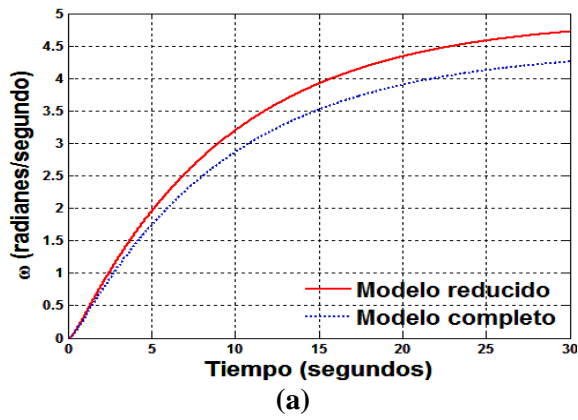
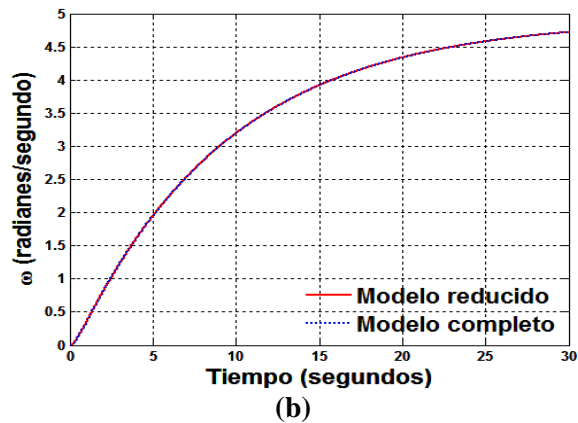


Gráfico 4 Posición  $\theta$  para  $R_f = 9, 8$  y  $7\Omega$



Análisis en el plano de fase

Para complementar el estudio es posible obtener también el plano de fase, el cual permite conocer las fronteras de estabilidad a través de relación (C. Juárez, 2011):

a) Para sistemas reducidos

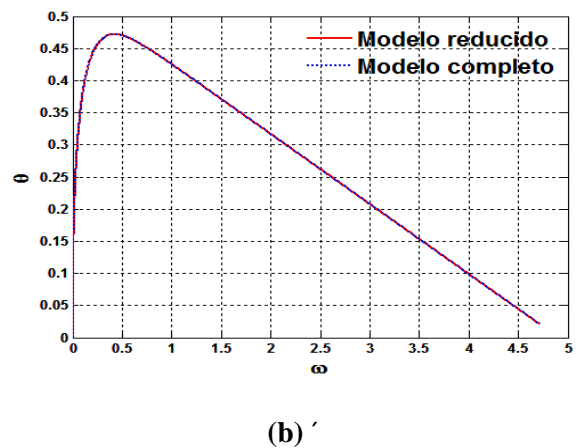
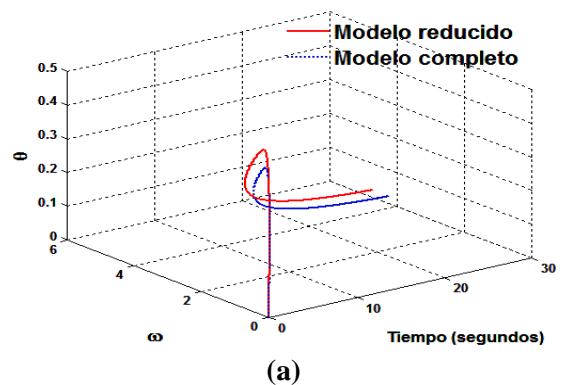
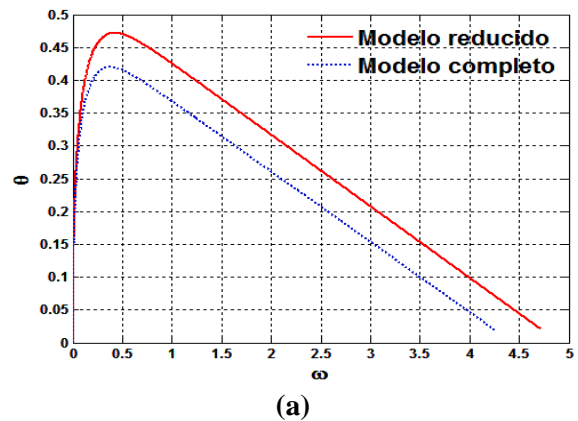
$$\frac{d\theta}{d\omega} = \frac{x_2(t)}{\dot{x}_2(t)} \tag{15}$$

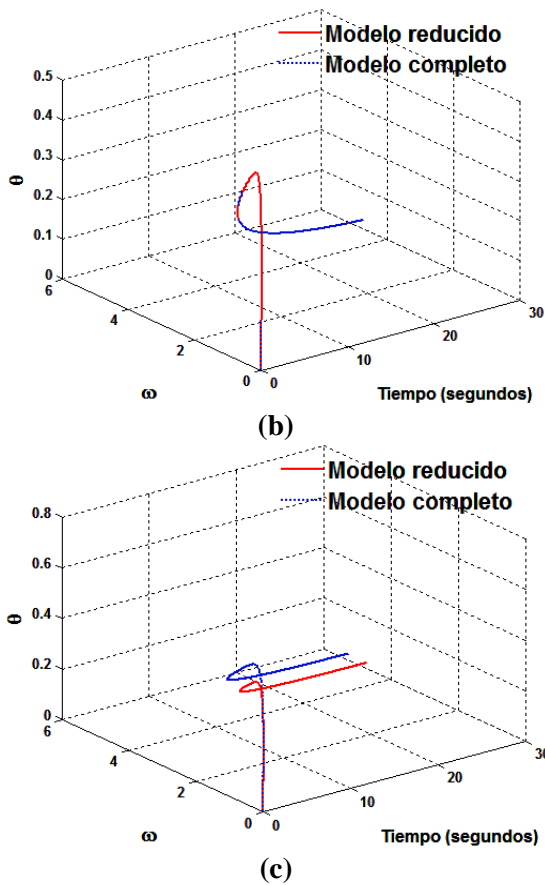
b) Para el sistema aumentado

$$\frac{d\theta}{d\omega} = \frac{x_3(t)}{\dot{x}_3(t)} \tag{16}$$

Usando el método de integración trapezoidal de la ecuación (14) se obtiene el gráfico 4.

El gráfico 5 muestra la trayectoria de fase para cada una de las resistencias de campo.





**Gráfico 5** Trayectoria plano de fase para  $R_f = 9, 8$  y  $7\Omega$

## Conclusiones

En este trabajo se diseñó y modeló un motor de cd con variación de resistencia de campo para regular la velocidad, para su análisis y estudio se revisó desde dos perspectivas a) modelo convencional reducido a dos variables de estado y b) modelo completo con tres variables de estado. La variable que aumentó en el modelo completo es la corriente de campo  $i_f$ , convencionalmente la corriente de campo se considera como un parámetro constante dentro de la dinámica del sistema, ya que su comportamiento tiende a estabilizarse para tiempos mayores que cero como se muestra en el gráfico 1.

El comportamiento de ambos modelos para una  $R_f = 8\Omega$  son idénticos, es decir, las ecuaciones (8) y (10) en espacio de estado son no lineales; cuando la no linealidad llega a tomar importancia en los sistemas de estudio, el modelo completo tiene mayor participación ya que contiene información adicional, principalmente para  $t \rightarrow 0$  que corresponden al tiempo de arranque.

Además, se obtuvo la posición del rotor a través del método de integración trapezoidal, la cual aporta para la obtención del plano de fase, el cual permite tener una mayor predicción sobre el funcionamiento del motor de cd.

## Agradecimientos

A la Universidad Autónoma del Estado de México a través del Programa PFCE-2019 asignado a la UAP Tianguistenco.

## Referencias

- A. Gilat, Matlab: una introducción con ejemplos prácticos, Reverte, 2006, ISBN: 9788429150353, pp. 255-261.
- C. Juárez, I. Martínez, Analysis of power system stability using phase plane analysis of Linear OMIB equivalents, 2011 8th International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control, 19 December 2011.
- Continua mediante Algoritmos Genéticos” Revista Perspectivas, 1(2), 31-37.
- D. E. Rodas, Estrategia de campo orientado en el control de motores de inducción, Scientia et Technica Año XII, No 30, Mayo de 2006 UTP. ISSN 0122-1701.
- I. Hernandez Casco, C. Juárez Toledo, I. Martínez, Interpolación polinomial para determinar el tiempo óptimo de tratamiento criogénico para acero AISI D2 en medio básico, Pistas Educativas, No. 112, Noviembre 2015. pp. 1087-1100.
- I. Martínez, A. R. Messina, and E. Barocio, “Perturbation analysis of power system: Effects of second and third-order nonlinear terms on system dynamic behavior,” Elect. Power Syst. Res., vol. 71, pp. 159–167, 2004.
- J. A. Somolinos, Avances en robótica y visión por computador, Universidad de Castilla La Mancha, 2002, ISBN: 9788484271994, pp. 87.
- J. G. Pérez, Montaje y mantenimiento de máquinas eléctricas rotativas. ELEE0109 - Montaje y mantenimiento de instalaciones eléctricas de baja tensión, IC Editorial, 2013, ISBN: 9788415670575.

K. Ogata, Ingeniería de control moderna, Pearson Educación, 2003, ISBN: 9788420536781, pp. 152-154.

Macías, R. M. B., Asqui, S. E. B., Romero-Pérez, J. A., & Miguel-Escrig, O. (2019), "Sintonización de Controladores PID para Control de Velocidad de Motores de Corriente

Morales, M. E. P., Zamora, M., & Rodríguez-Liñán, Á. (2019). "Caracterización paramétrica para un modelo de segundo orden del servomotor RC". Ingenierías, 22(82), 7.

R. C. Dorf, Robert H. Bishop, Sistemas de control moderno, Pearson Educación, 2008, ISBN: 9788420544014, pp. 58.