

## Capítulo 3

### **Relación de procesos de persistencia estimados a través de los coeficientes Hurst y volatilidad implícita en el mercado mexicano**

Guillermo Sierra

G. Sierra  
Universidad de Guadalajara, Departamento de Métodos Cuantitativos, CUCEA, Periférico Norte 799, Núcleo Universitario Los Belenes, Zapopan, Jalisco.  
gsierraj@yahoo.com.mx

M.Ramos, F.Miranda (eds.) *Optimización-Estocástica-Recursiva-Coherente-Sistémica y sus variantes (probabilidad, econometría y estadística aplicada)*, Temas Selectos de Optimización-©ECORFAN-Santiago de Compostela, España, 2012.

## Abstract

This paper proposes a comparative analysis in periods of high volatility of the persistence (measure with Hurst exponent process). In general the persistence is constant or even reduced for the underlying Índice de Precios y Cotizaciones (IPC) before the highest volatility value. Besides using The H-J-B method gets the Black Scholes equation and to propose a solution for the case with stochastic volatility and finally call and put options are valued for different Hurst coefficients and the volatility.

## 3 Introducción

La volatilidad es un tema financiero de gran importancia en la actualidad y ha sido estudiado en la literatura desde varios modelos. Sin embargo, el enfoque que planteamos en este trabajo está relacionado principalmente con la metodología de Rango Reescalado (R/S) cuyos trabajos seminales fueron originalmente propuestos por Mandelbrot [1968] y [1982] y en una aplicación muy específica en el área de hidrología por Hurst[1951]. También los libros de Peters[1991] y los trabajos de Sierra[2007] y [2008] son referencias básicas para este trabajo.

El otro tema importante en este trabajo es el relativo al movimiento browniano fraccional (MBF). Entre los autores que han publicado sobre el movimiento browniano fraccional y su aplicación en las Finanzas son Oksendal [2004] y Hu[2000], además de Duncan y Pasik-Duncan(2002). Estos trabajos van recuperando varias de las técnicas matemáticas que el modelo Black-Scholes tradicional utiliza, además mediante el uso del producto Wick, las derivadas Malliavin y las integrales Skorohod es posible generalizar entre otros, el teorema de Girsanov, las esperanzas condicionales y lema de Ito para su posterior aplicación en las finanzas. Los artículos de Necula [2002][2002 b] y de Rosek (2006) presentan una perspectiva diferente de los estudios de Oksendal y Hu y en forma practica presentan una deducción de la ecuación Black-Scholes a partir de movimientos browniano fraccionales.

### 3.1 Antecedentes sobre la volatilidad

El tema de la volatilidad se relaciona como indicador de la incertidumbre de los rendimientos y generalmente está asociado al estimador de desviación estándar de un activo. En los hechos empíricos se observa dos características importantes: la primera es que volatilidades altas tienden a persistir por periodos prolongados antes de alcanzar un equilibrio de largo plazo (efecto conocido como clustering). La segunda característica que hay que considerar es que la volatilidad aumenta más que proporcionalmente cuando los rendimientos aumentan que cuando los rendimientos disminuyen, esta propiedad es conocida como apalancamiento.

En la sección siguiente se propone la volatilidad como un proceso estocástico, que además también posee un comportamiento de persistencia o de memoria larga. Además se revisa y se aplica la metodología de Hurst para comprobar dicha hipótesis. Existen distintas formas de modelar la volatilidad como pueden ser: la estimación paramétrica, la histórica con promedio móvil, utilizando series de tiempo (ARMA, GARCH), con procesos estocásticos y la volatilidad implícita. El método paramétrico es el más sencillo pero el menos preciso de los métodos. La volatilidad es un parámetro que no cambia en el tiempo y mantiene su mismo valor durante toda la serie del tiempo. La volatilidad histórica de promedio móvil abre una ventana móvil de un cierto tamaño. A diferencia del caso anterior, la volatilidad no es un parámetro sino un proceso que va evolucionando en el tiempo.

El modelo ARMA (modelo autoregresivo y de promedios móviles) considera que el promedio de los rendimientos es de cero y modela la varianza de los rendimientos o el cuadrado de los rendimientos mediante una regresión lineal con el cuadrado de los rendimientos de periodos anteriores. Este modelo se puede pensar como una generalización del caso anterior donde los coeficientes o pesos están determinados mediante un proceso de regresión. El propósito del modelo GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) es estimar la varianza no condicional de los rendimientos de los activos financieros. En el modelo más sencillo GARCH(1,1) mediante una regresión lineal supone que la varianza condicional como función de un término independiente, del error del periodo anterior y de la varianza del periodo anterior que corresponde al término autoregresivo. Para que en modelo sea estacionario se requiere que los estimadores o coeficientes de la regresión sean positivos (incluyendo el término independiente) y que la suma de los dos primeros sea menor o igual a uno. El modelo de la volatilidad estocástica consiste en estimar mediante un movimiento geométrico browniano el comportamiento de la varianza de un activo compuesto por un término de tendencia y una parte estocástica de un movimiento browniano.

### 3.2 Análisis de la volatilidad con metodología rango reescalado (R/S)

En el trabajo seminal de Black-Scholes (1973), el término estocástico del subyacente se planteaba modelado con un movimiento browniano. Más adelante se propuso modelar simultáneamente el subyacente y la volatilidad como un proceso estocástico, como es el caso de artículo de 1987 de Hull and White, donde se plantea la ecuación y la solución cerrada para la generalización de la fórmula Black-Scholes.

Considerando lo anterior, el siguiente paso es determinar si las series financieras estocásticas de la volatilidad del índice IPC pueden ser consideradas como series persistentes, antipersistentes o independientes. Para lograr esto se aplica la metodología de rango reescalado (R/S) para el cálculo del coeficiente Hurst.

Hurst desarrolló la metodología de Análisis de Rango Reescalado (R/S), cuyo coeficiente o exponente conocido como Hurst, es una medida de independencia de las series de tiempo y una manera de distinguir series fractales. Este método inicialmente fue propuesto para resolver un problema de la hidrología. Por medio de una regresión lineal de los puntos de  $\ln(R/S)_n$  contra  $\ln(n)$  se determina el exponente de Hurst (H). Si la serie tiene características de independencia entonces  $H = 0.50$ , si  $0.5 < H < 1.0$  la serie de tiempo es persistente, es decir caracterizada por efectos de memoria de largo plazo que suceda hoy impactará en el futuro por siempre y si  $0.0 < H < 0.5$  significa antipersistencia. En términos generales, la metodología de Rango Reescalado (R/S) consiste en tomar los rendimientos logarítmicos de una serie de tiempo de tamaño  $T$ . Posteriormente se forman  $A$  subperiodos contiguos de longitud  $t$  y para cada subperiodo  $I_a$  de longitud  $t$  se determina el valor promedio del rendimiento de la variable. Se van sumando las diferencias de cada elemento respecto de la media para obtener una nueva serie acumulada y se determina Rango a la diferencia entre los valores máximo y mínimo de la serie. Por otra parte, se estima la desviación estándar muestral tradicional  $S_{Ia}$  de las series de diferencias de la forma tradicional. Y para cada periodo el rango  $R_{Ia}$  se normaliza dividiendo por su desviación estándar muestral  $S_{Ia}$  correspondiente. Por lo tanto el rango reescalado para cada subperiodo  $I_a$  es igual a  $R_{Ia} / S_{Ia}$ . Como tenemos  $A$  periodos continuos de longitud  $n$ , entonces tomamos el valor promedio  $R/S$  para periodos de longitud  $t$ . La longitud  $t$  o el tamaño del subperiodo se incrementa al siguiente valor entero posible de  $(T-1)/t$ . Iniciamos con el valor más pequeño de acuerdo a la condición anterior y se repiten los pasos y se repiten hasta  $t = (T-1)/2$ . Posteriormente aplicamos una regresión de mínimos cuadrados de  $\log(R/S)_t$  contra  $\log(t)$ .

La ordenada al origen es el  $\log(c)$  y la pendiente de la ecuación es la estimación del exponente Hurst  $H$ . Para mayores detalles consultar Hurst[1951] o Sierra[2007].

Aplicando la metodología del Rango Reescalado, después de seguir los pasos del algoritmo se hace una regresión de  $\ln(R/S)$  contra  $\ln(t)$ . Sin embargo se debe establecer un criterio para plantear una prueba de significancia sobre los resultados de un análisis  $(R/S)$  similar a las pruebas "t" de las regresiones lineales.

Siguiendo Peters [1991] encontramos un resumen de los estimadores propuestos para el valor esperado y la varianza sobre el coeficiente  $H$  realizados por Feller y Alanis and Lloyd. El estadístico que nos dice cuantas desviaciones estándar se encuentra alejado del valor medio  $E(H)$  y el valor obtenido de  $H$  en el proceso de Rango-Reescalado. Supone en la hipótesis nula que  $H=0.5$  tiene un comportamiento de caminata aleatoria o de browniano tradicional y por tanto de independencia contra las hipótesis alternativas ( $H <> 0.5$ ) que corresponde a comportamiento persistente o antipersistente de los procesos. Aplicando la metodología  $(R/S)$  y los estadísticos asociados para determinar su nivel de significancia sobre la serie del IPC llegamos un coeficiente Hurst de 0.5512 y no resulta estadísticamente significativo para ser considerado como con un proceso con persistencia, para mayores detalles consultar Sierra.

Si se considera únicamente el valor del exponente  $H$  se podría deducir que la serie IPC no sigue el comportamiento de una serie persistente. Pero para confirmarlo se necesita considerar las pruebas de hipótesis para ver si el resultado para esa muestra es significativo, entonces se acepta la hipótesis inicial de una serie con características de independencia. Aplicando el mismo análisis  $(R/S)$  sobre la serie de la volatilidad de los rendimientos del IPC generada de la ventana móvil mencionada en anteriormente llegamos un coeficiente Hurst de 0.7384 y en este caso si resulta estadísticamente significativa para ser considerada una serie con persistencia.

### 3.3 Método H-J-B con movimiento browniano fraccional para modelar volatilidad estocástica

El problema del consumidor estocástico es un problema de control óptimo estocástico donde se considera una función a maximizar sujeto a una restricción con un término estocástico modelado por un movimiento browniano, para resolver el problema se aplica la metodología de Hamilton-Jacobi-Bellman puede aplicarse a la solución de este problema. Una referencia importante para revisar el método es Venegas [2006]. Suponemos inicialmente un agente racional que representa a todos los inversionistas y cuya utilidad depende del consumo. Este agente desea formar un portafolio tres diferentes tipos de activos: un bono de tasa fija, una acción y un derivado sobre esa acción. El problema consiste en encontrar el consumo óptimo y las inversiones que deberán realizarse en cada uno de los títulos de tal forma que maximicen su utilidad.

El problema del consumidor plantea maximizar la siguiente función conocida como de utilidad indirecta o de consumo utilizando la función de utilidad logarítmica  $u(C_0) = \ln(C_0)$

$$J(W, t) = \max \bar{E} \left[ \int \ln C_0 e^{-\rho t} dt \mid F_t \right], \quad (3.1)$$

Donde  $\bar{E}$  son las expectativas cuasicondicionales recordando que ahora estamos proponiendo un movimiento browniano fraccional en el término estocástico ver artículo de Necula [2002], Hu and Oksendal[2004]. La restricción presupuestal del flujo a invertir esta dada por el cambio en la riqueza definida de la siguiente forma:

También se sugiere que para modelar el comportamiento de la volatilidad de una manera más general podría hacerse mediante un movimiento browniano fraccional, es decir, se puede proponer a un activo subyacente  $S$  modelado por un browniano fraccional con un exponente Hurst  $H_1$ , cuya volatilidad  $V$  a su vez, sea modelada por otro browniano fraccional exponente Hurst  $H_2$  como en el caso siguiente:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dB_{H_1} \quad (3.2)$$

$$dV = \alpha V dt + \beta V dB_{H_2} \quad (3.2.1)$$

Con  $V = \sigma^2$  y además podemos suponer en el caso más sencillo que los dos movimientos brownianos fraccionales del subyacente y de la volatilidad no tienen correlación alguna o bien:

$$COV(dB_{H_1}, dB_{H_2}) = 0$$

Se propone un derivado financiero que sea función de un activo subyacente y de su volatilidad estocástica del mismo, entonces  $C = C(t, S, V)$  y de la generalización del lema de Ito considerando los dos procesos se llegaría a lo siguiente:

$$\frac{dC}{C} = \alpha_C dt + \kappa_C dB_{H_1} + \eta_C dB_{H_2} \quad (3.3)$$

Con  $\alpha_C$ ,  $\kappa_C$  y  $\eta_C$  dados por:

$$\alpha_C = \frac{1}{C} \left( \frac{\partial C}{\partial t} + \mu S \frac{\partial C}{\partial S} + \alpha \frac{\partial C}{\partial V} + \sigma^2 S^2 H_1 t^{2H_1-1} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + \beta^2 V^2 H_2 t^{2H_2-1} \frac{\partial^2 C}{\partial V^2} \right) \quad (3.3.1)$$

$$\kappa_C = \frac{1}{C} \left( \sigma S \frac{\partial C}{\partial S} \right) \quad (3.3.2)$$

$$\eta_C = \frac{1}{C} \left( \beta V \frac{\partial C}{\partial V} \right) \quad (3.3.3)$$

Considerando un agente racional que constituye un portafolio con la posibilidad de elegir entre, un bono de tasa fija de tipo, una acción y un derivado sobre esa acción, pero suponiendo que la volatilidad estocástica se describe con un movimiento browniano fraccional. El problema de optimización consiste en determinar el consumo óptimo y las inversiones en cada uno de sus títulos de tal forma que maximicen su utilidad y para resolverlo utilizaremos el método H-J-B. La restricción presupuestal del cambio en la riqueza compuesta por los rendimientos del bono, la acción y el derivado, donde  $w_1$ ,  $w_2$  y  $1-w_1-w_2$  son las proporciones del portafolio asignados a cada uno de los activos respectivamente y donde  $dB_H$  es un movimiento browniano fraccional, y de la sección anterior  $\alpha_C$  y  $\sigma_C$  entonces tenemos:

$$dA = \alpha_A dt + \sigma_{A1} dB_{H_1} + \sigma_{A2} dB_{H_2} \quad (3.3.4)$$

Con  $\alpha_A$  y  $\sigma_{A1}$  y  $\sigma_{A2}$  como:

$$\alpha_A = A(w_1 r + w_2 \mu + (1-w_1-w_2)\alpha_C - \frac{C_0}{A}) \quad (3.3.4.1)$$

$$\sigma_{A1} = A(w_2 \sigma + (1-w_1-w_2)\kappa_C), \quad (3.3.4.2)$$

$$\sigma_{A2} = A\eta_C(1 - w_1 - w_2) \quad (3.3.4.3)$$

Se aplica el método H-J-B estocástico y el problema de elección consiste en encontrar  $C_0$ ,  $w_1$  y  $w_2$  que maximice la ecuación (3.1) sujeta a la restricciones (3.3.4, 3.3.4.1, 3.3.4.2 y 3.3.4.3), donde recordemos que  $\tilde{E}[\cdot]$  es la esperanza cuasicondicional consultar Hu and Oksendal [2000]

$$J(w_1, w_2, t) = \max_{\{C_0, w_1, w_2\}} \tilde{E} \left[ \int_t^\infty \ln C_0 e^{-\rho t} dt \mid F_t \right], \quad (3.5)$$

Que también puede escribirse como:

$$J(w_1, w_2, t) = \max_{\{C_0, w_1, w_2\}} \tilde{E} \left[ \int_t^{t+dt} \ln C_0 e^{-\rho t} dt + \int_{t+dt}^\infty \ln C_0 e^{-\rho t} dt \mid F_t \right], \quad (3.6)$$

Después de desarrollar, se sigue:

$$J(w_1, w_2, C_0) = \max_{\{C_0, w_1, w_2\}} \tilde{E} \left[ \ln C_0 e^{-\rho t} dt + o(dt) + J(t, A) + dJ(t, A) + o(dt) \mid F_t \right], \quad (3.7)$$

Se sustituyen  $dJ(t, A)$  del Lema de Ito fraccional y después de ordenar y despreciar algunos términos, tomando el valor esperado condicionado y recordando que se supone que la covarianza entre los dos brownianos fraccionales es cero, se llega a:

Se toma:

$$0 = \max_{\{C_0, w_1, w_2\}} \tilde{E} \left[ \ln C_0 e^{-\rho t} dt + \left( \frac{\partial J}{\partial t} + \alpha_A \frac{\partial J}{\partial A} + (\sigma_{A1}^2 H_1 t^{2H_1-1} + \sigma_{A2}^2 H_2 t^{2H_2-1}) \frac{\partial^2 J}{\partial A^2} \right) dt \right] \quad (3.8)$$

Se propone la solución para  $J(t, A)$  del siguiente estilo:

$$J(t, A) = (V(A) + g(V))e^{-\rho t} \quad (3.9)$$

Como siguiente paso, ahora se propone una solución para  $V(A)$  de la siguiente forma:

$$V(A) = \beta_0 + \beta_1 \ln A \quad (3.10)$$

Se deriva parcialmente y después de ordenar términos la ecuación anterior respecto a  $C_0$ ,  $w_1$  y  $w_2$  y se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$C_0 = \frac{A}{\beta_1} \quad (3.11)$$

$$w_1 + \left( 1 + \frac{H_1 t^{2H_1-1} \sigma \kappa_C}{H_1 t^{2H_1-1} \kappa_C^2 + H_2 t^{2H_2-1} \eta^2 c} \right) w_2 = 1 + \frac{r - \alpha_C}{2(H_1 t^{2H_1-1} \kappa_C^2 + H_2 t^{2H_2-1} \eta^2 c)} \quad (3.12)$$

$$w_1 + \left( 1 + \frac{H_1 t^{2H_1-1} \sigma (\kappa_C - \sigma)}{H_1 t^{2H_1-1} \kappa_C (\kappa_C - \sigma) + H_2 t^{2H_2-1} \eta^2 c} \right) w_2 = 1 + \frac{\frac{\mu - r}{2}}{H_1 t^{2H_1-1} \kappa_C (\kappa_C - \sigma) + \eta^2 c H_2 t^{2H_2-1}} \quad (3.13)$$

De las ecuaciones anteriores, el consumo no se ve afectado por el proceso estocástico que lo modela, mientras que las posibles inversiones son funciones de los exponentes Hurst ( $H_1$  y  $H_2$ ) y de tiempo inicial  $t$ . Si en la ecuación de soluciones se considera una solución de esquina  $w_1 = 0$  y  $w_2 = 1$ , se sustituyen las expresiones generales de  $\kappa_C$  y  $\alpha_C$  se llega a la ecuación Black-Scholes equivalente para movimientos brownianos fraccionales con volatilidad estocástica fraccional.

$$\frac{\partial C}{\partial t} + rS \frac{\partial C}{\partial S} + \alpha \frac{\partial C}{\partial V} + \sigma^2 S^2 H_1 t^{2H_1-1} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + \beta^2 V^2 H_2 t^{2H_2-1} \frac{\partial^2 C}{\partial V^2} - rC = 0 \quad (3.14)$$

En donde  $r = \mu - 2\sigma^2 H_1 t^{2H_1-1}$  y el valor de mercado de riesgo estará dado por:  
 $\lambda = 2\sigma H_1 t^{2H_1-1}$

La ecuación (3.14) es similar a la ecuación Black-Scholes con volatilidad estocástica obtenida por Hull and White (1987) pero con la diferencia que los procesos estocástico considerados son movimientos brownianos fraccionales y no existe correlación entre el comportamiento del subyacente y su volatilidad.

### 3.4 Volatilidad implícita de una opción europea modelada con un MBF

El precio de una opción call europea en cualquier  $0 \leq t \leq T$ , dado un precio de ejercicio  $K$ , una tasa libre de riesgo  $r$ , una volatilidad, un vencimiento en  $T$  y un coeficiente Hurst  $H$  de la serie financiera subyacente modelada por un su parte estocástica por un movimiento browniano fraccional de acuerdo al trabajo de Necula (2002) esta dado por:

$$C(t, S(t)) = S(t)N(d_1) - K e^{-r(T-t)} N(d_2) \quad (3.15)$$

Donde:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S(t)}{K}\right) + r(T-t) + \frac{1}{2}\sigma^2(T^{2H} - t^{2H})}{\sigma\sqrt{T^{2H} - t^{2H}}} \quad (3.16)$$

Y

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S(t)}{K}\right) + r(T-t) - \frac{1}{2}\sigma^2(T^{2H} - t^{2H})}{\sigma\sqrt{T^{2H} - t^{2H}}} \quad (3.16.1)$$

Que satisface la ecuación Black-Scholes Fraccional:

$$\frac{\partial C(t, S)}{\partial t} + H\sigma^2 t^{2H-1} S^2 \frac{\partial^2 C(t, S)}{\partial S^2} + rS \frac{\partial C(t, S)}{\partial S} - rC(t, S) = 0 \quad (3.17)$$

Con condiciones de Frontera:

$$C(t, S) = \text{Max}(S - K, 0)$$

Algunos modelos están basados en información histórica y en sus pronósticos no incorporan eventos extremos o cambios estructurales. Para corregir esto se debe incluir la información de la volatilidad implícita en el precio de opciones.

La volatilidad implícita toma los precios de los contratos de las opciones que cotizan en el mercado y a partir de estos se infieren las expectativas de mercado por lo tanto tiene la ventaja de maximizar las oportunidades de inversión, de arbitraje, de cobertura e incluso de especulación. Este modelo utiliza la valuación de opciones de Black-Scholes y un método numérico de aproximaciones (como el de Newton o Newton-Raphson) para estimar la volatilidad partiendo del conocimiento del precio y de las variables y los parámetros restantes.

De acuerdo con este modelo a partir del precio de contratos de opciones europeas (call o put), del precio del activo subyacente, del vencimiento de la opción y la tasa de interés libre de riesgos se estima la volatilidad correspondiente en cada momento del tiempo.

Este procedimiento ya existía en el caso de procesos estocásticos, la novedad consiste en aplicarlos a procesos modelados con brownianos fraccionales y exponentes Hurst.

Con el valor de la prima y la solución de la ecuación de Black-Scholes Fraccional (3.15, 3.16.1 y 3.16.2) y el método de Newton podemos determinar el valor de la volatilidad implícita con un algoritmo recurrente de acuerdo a la siguiente expresión para el caso que se conoce el precio de un contrato call europeo:

$$\sigma_{t+1} = \sigma_t + \frac{C - (S(t)N(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2))}{S(t)N'(d_1)(\sqrt{T^{2H} - t^{2H}} - \frac{d_1}{\sigma}) + Ke^{-r(T-t)}N'(d_2)(\sqrt{T^{2H} - t^{2H}} - \frac{d_2}{\sigma})} \quad (3.18)$$

De forma análoga para el put europeo podemos encontrar una fórmula la volatilidad implícita en el caso de un movimiento browniano fraccional:

$$\sigma_{t+1} = \sigma_t + \frac{P - (Ke^{-r(T-t)}N(-d_2) - S(t)N(-d_1))}{S(t)N'(d_1)(\sqrt{T^{2H} - t^{2H}} - \frac{d_1}{\sigma}) + Ke^{-r(T-t)}N'(d_2)(\sqrt{T^{2H} - t^{2H}} - \frac{d_2}{\sigma})} \quad (3.19)$$

Para realizar la estimación de la volatilidad implícita de una opción ecuaciones (3.18) y (3.19) con información del mercado de valores, utilizaremos la publicación del Mercado Mexicano de Derivados (Mexder) de Indicadores del Mercado en el Boletín de Opciones.

En este caso se observaría que la volatilidad implícita para determinado precios de ejercicio del IPC va aumentando conforme la serie tiene mayor persistencia (a medida que  $H$  va aumentando). En otras palabras, la volatilidad implícita de opciones call europeas con subyacente que posea persistencia, es mayor que la volatilidad de opciones call con subyacentes de incrementos independientes, ver Sierra [2007].

Otra función importante de la volatilidad implícita además de ser un indicador asociado al riesgo o la incertidumbre es ayudar a la creación de indicadores, de productos referenciados e índices. Su importancia y su aceptación han crecido en los últimos años ya que brinda una idea de la volatilidad que el mercado esta esperando.



### 3.5 El índice de volatilidad Vimex

La metodología del índice de volatilidad implícita del mercado mexicano, VIMEX, refleja la volatilidad esperada del mercado accionario y estimada la volatilidad implícita a través de las opciones del IPC listadas en el MexDer. El procedimiento consiste principalmente de tres etapas que se mencionan a continuación (la metodología puede ser revisada con mayor detalle en la página electrónica del MexDer).

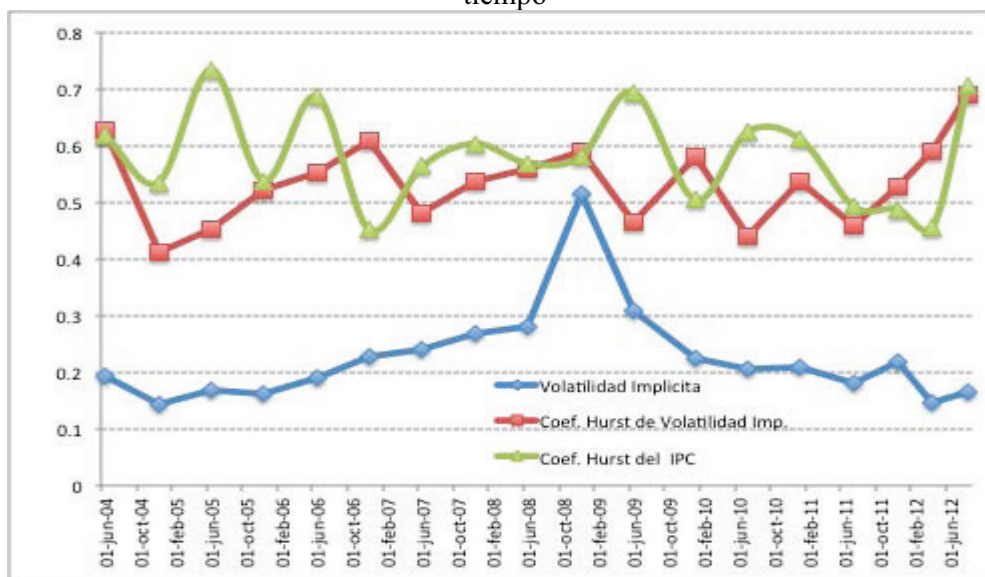
En la primera etapa del procedimiento se estima el promedio de las volatilidades implícitas de las parejas de opciones europeas (call y put) que se ubican por arriba y por abajo del precio strike teórico de acuerdo a los vencimientos de opciones más próximas y los segundos vencimientos más próximos. La segunda etapa consiste en encontrar la volatilidad implícita del precio de ejercicio en el dinero interpolando las volatilidades de la etapa anterior utilizando los precios de ejercicio inmediatos por arriba y por abajo del cierre de mercado respectivamente en el momento del cálculo y el nivel de cierre del IPC del mercado de capitales.

En la etapa final de la estimación se ponderan las volatilidades del vencimiento más cercano y del segundo más cercano para crear un periodo constante considerando que los vencimientos son trimestrales. Considerando las ecuaciones (3.18) y (3.19) puede estimarse las volatilidades implícitas para diferentes niveles de persistencia.

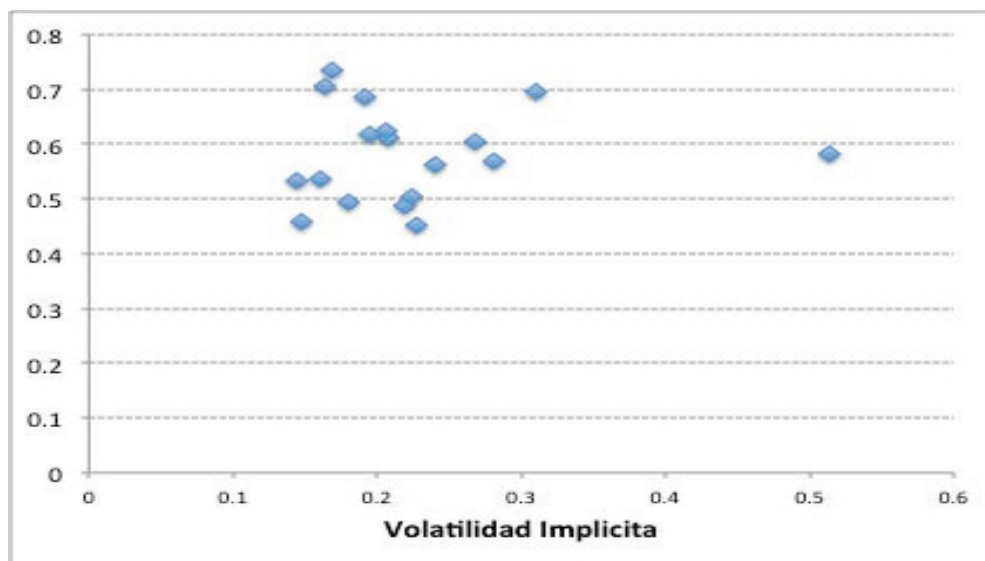
### 3.6 Persistencia y volatilidad implícita

Tomando la volatilidad implícita VIMEX del mercado mexicano, estimada de acuerdo a la metodología de la sección anterior y reportada por el mercado mexicano de derivados en su página electrónica y por otra parte calculando el exponente o coeficiente Hurst de acuerdo a la sección 3 tomando ventana anuales desde el año 2004 y hasta 2012, para determinar la persistencia del mismo índice IPC como de su volatilidad obtenemos las figuras 3.1 y 3.2.

**Figura 3.1** Volatilidad Implícita (MEXDER), Coeficiente Hurst del IPC y su Volatilidad en el tiempo



**Figura 3.2** Coeficiente Hurst contra Volatilidad Implícita del IPC



Como puede observarse de la gráfica 3.1 el coeficiente Hurst debería considerarse más que como un número constante o un parámetro como un proceso, es decir, es una variable que va cambiando en el tiempo alrededor del valor de  $H=0.5$  que es el caso de independencia y con forma senoidal o pudiera ser con regresión a la media.

El coeficiente Hurst del IPC es más volátil que el coeficiente Hurst de la volatilidad implícita. Incluso, si ahora en un segundo paso se estima en ambas series el coeficiente Hurst del proceso del coeficiente Hurst resulta que sus valores son  $H=0.5916$  y  $H=0.5445$  para la serie de la volatilidad y de índice IPC respectivamente que efectivamente concuerda con lo que se aprecia de la gráfica, más persistencia en el coeficiente de la volatilidad.

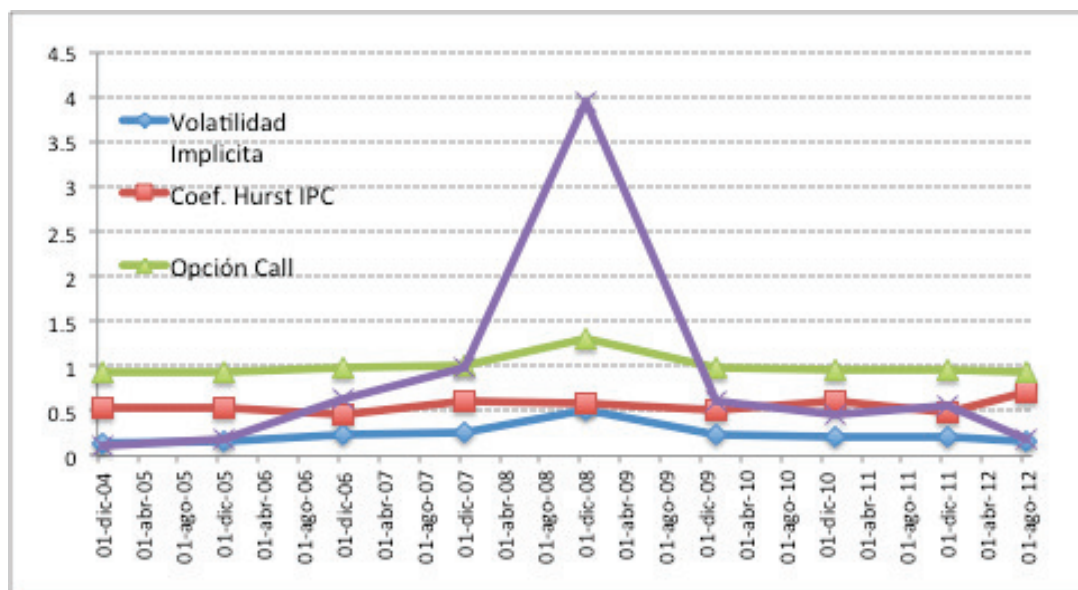
Estimando una regresión lineal de la serie de volatilidad y procesos Hurst del IPC, tomando como variable dependiente la primera e independiente la segunda, resulta una  $R^2$  de casi cero y no significativa la relación.

Por otra parte, de las figuras 3.1 y 3.2 se observa que en periodos de baja volatilidad el coeficiente Hurst del IPC puede ir fluctuando alrededor de el valor medio de 0.5 y previos al valor máximo de la volatilidad se pierde este comportamiento y se observa una tendencia a la baja.

Posterior al máximo en la etapa en que empieza a disminuir la volatilidad, la persistencia del IPC empieza a aumentar.

Por último, haciendo el ejercicio de estimar el valor de la prima call y put siguiendo las ecuaciones 3.15, 3.16.1 y 3.16.2, asumiendo solamente cambios en la volatilidad implícita y del coeficiente Hurst en el mismo periodo 2004-2011 y considerando los otros parámetros sin cambios importantes (tasa libre de riesgo=0.04, Precio de ejercicio= 35,000, Precio del Subyacente (IPC)=42,500 y vencimiento 1 año )se obtiene la figura 3.2 en donde se aprecia que el factor de volatilidad en la estimación de las primas de las opciones es más importante que el coeficiente Hurst.

**Figura 3.3** Valor de la prima de las Opciones Call y Put considerando únicamente cambios en la volatilidad y la persistencia



### 3.7 Conclusiones

Se revisa las propiedades de independencia de la serie IPC y de su volatilidad, confirmando que la presencia de persistencia llega a ser significativas. Con base a este resultado y de otros autores, se propone que el comportamiento, tanto el activo subyacente como su volatilidad sea modelado por un movimiento browniano fraccional.

Proponiendo el método H-J-B sobre un activo y su volatilidad y modelando su términos estocásticos con dos procesos brownianos fraccionales no correlacionados es posible plantear a una ecuación de tipo Black-Scholes fraccional generalizada.

El coeficiente Hurst puede plantearse de una forma más general que como un parámetro, más bien como un proceso que tiene un comportamiento similar a una senoidal oscilando alrededor del valor de serie independiente.

En este caso en periodos previos a alta volatilidad, el coeficiente Hurst del IPC tiende a tener un valor constante o incluso a tener un comportamiento ligeramente decreciente. El análisis de regresión lineal no aporta ningún resultado concluyente.

El valor que predomina para la estimación de las primas de los calls y puts, es el de la volatilidad más que el del coeficiente Hurst, especialmente en los casos de alta volatilidad.

### Referencias

Black, F. and M. Scholes (1973) The pricing of Options and corporate liabilities, Journal of Political Economy, 81, pp. 637-659.

Duncan, T. E., Y., Hu and B., Pasik-Duncan (2002) Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion, SIAM J. Control Optim., 38, pp. 582-612.

Hu, Y. and B. Oksendal (2000) Fractional White Noise Calculus and Applications to Finance, Preprint University of Oslo.

Hull, J. and A. White (1987) The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities, The Journal of Finance, 42(2), pp. 281-300.

Hurst, H. (1951) The long-term storage capacity of reservoirs Transactions of American Society Civil Engineer, pp. 116 - 195.

Mandelbrot, B. (1982) The Fractal Geometry of Nature, NY W.H. Freeman

Mandelbrot, B. and V. Ness (1968) Fractional Brownian Motions, Fractional Noises and Applications, SIAM review 10, 11(3).

Necula C. (2002) Modeling and detecting Long Memory in Stock returns, Academy of Economic Studies, Dissertation Paper.

Necula C. (2002) Option Pricing in a Fractional Brownian Motion Environment, Academy of Economic Studies, Bucharest Romania.

Oksendal B. (2004) Fractional Brownian Motion in Finance Preprint University of Oslo.

Peters, E. (1991), Chaos and Order in Capital Markets, New York: John Wiley and Sons.

Rosek S. and R. (2006) Schobel Risk Preference Based Option Pricing in Fractional Brownian Market, Preprint Faculty of Economics and Business Administration, University of Tbingen, Germany.

Sierra, G. (2007), Procesos Hurst y Movimiento Browniano Fraccional en Mercados Fractales, Tesis de Doctorado en Ciencias Financieras ITESM, CCM.

Sierra G, "Aplicación del método H-J-B para la modelación estocástica de la volatilidad en series con persistencia: El caso del IPC en México", Eeconomía, Número 20, Octubre-Diciembre 2008, pp 73-99

Venegas F, (2006), Riesgos Financieros y Económicos, Thompson.