

Medición de las Desigualdades Departamentales a partir del  
análisis de eficiencia técnica y productividad total de los factores.  
Periodo 2000-2011

Francisco Javier Cardozo Tovar    Oscar Mauricio Orozco Sánchez

Mayo 2012

# Resumen

- Este trabajo mide las desigualdades en eficiencia entre los departamentos, desde principios del 2000 mediante la medición de la eficiencia técnica y la productividad total de los factores.

# Objetivos

- Eficiencia técnica y PTF de 23 departamentos colombianos (fronteras estocásticas)
- Determinantes de la eficiencia
- Convergencia (Baumol)
- Desigualdades regionales

# Preguntas relevantes acerca de las desigualdades departamentales

- Si las cantidades de capital y mano de obra contribuyen significativamente a la generación del producto de los departamentos ¿Como es el aprovechamiento de los mismos dentro de sus estructura productiva? (Eficiencia técnica *ET*)
- De acuerdo a la situación actual ¿Como ha sido la evolución de la productividad de dichos factores? (*PTF*)
- Que variables contribuyen a ese aprovechamiento productivo (Caracterización de la eficiencia)
- A medida que pasa el tiempo ¿Las brechas de eficiencia se van cerrando? (Convergencia )

# Estado del Arte

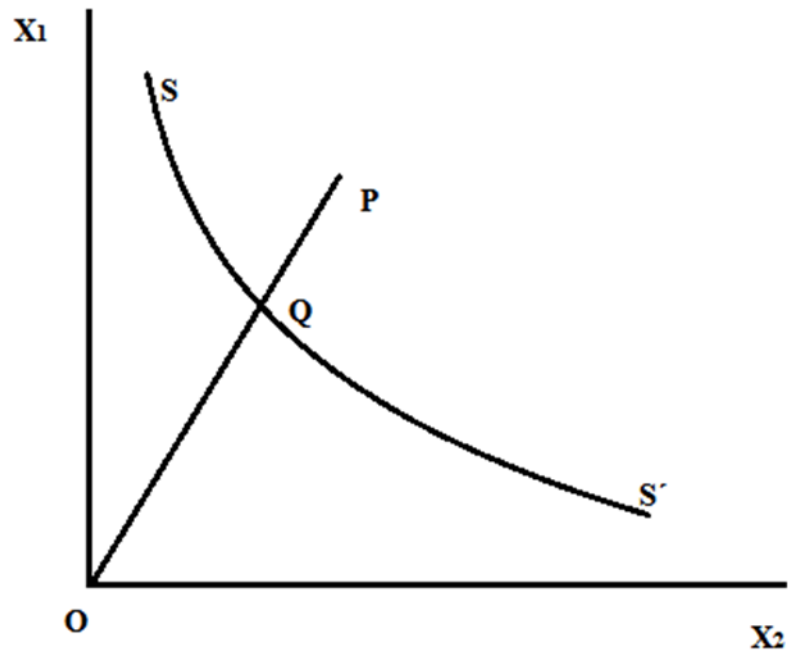
- Farrel, M. J. (1957), “The measurement of productive efficiency”, *Journal of The Royal Statistical Society*, Series A, General, 120, pp. 253-281.
- Battese, G., Coelli, T. (1988). “Prediction of firm-level technical efficiencies with a generalised production function and panel data”. *Journal of Econometrics* 38, 387-399
- Gumbau, M. (1998), Regional Efficiency: a stochastic frontier approach, *Applied Economic Letters*, 5, pp.723-726
- Gumbau, M. (2000), Efficiency and technical progress: sources of convergence in the Spanish regions *Applied Economics*, 32, pp.467-726.
- Puig-Junoy, J. (2001), Technical efficiency and public capital in U.S. states: A stochastic Frontier approach, *Journal of Regional Science*, 41(1), pp. 75-96.
- Perez, L. (2003), “STOCK DE CAPITAL DE LA ECONOMÍA CHILENA Y SU DISTRIBUCIÓN SECTORIAL”, Central Bank of Chile Working Papers, N<sup>o</sup> 233.
- Solow, R. (1957), Technical Change and the Aggregate Production Function, *The Review of Economics and Statistics*, 39(3), pp. 312-320
- Wu, Y.(2000), Is China’s economic growth sustainable? A productivity analysis, *China Economic Review*, 11, pp. 278-296.

# Contexto general de la economía colombiana

- Oriente representa 57% del territorio y alberga un 5% de la población.
- para el año 2008, el PIB reportado para Guainía, rondaba los 129 mil millones de pesos; mientras que para Bogotá estuvo rondando los 107 Billones de pesos.
- el oriente creció en general a tasas por encima de las presentadas en departamentos de occidente.
- Presencia parcializada de grupos ilegales.
- Diferencia de dotaciones.

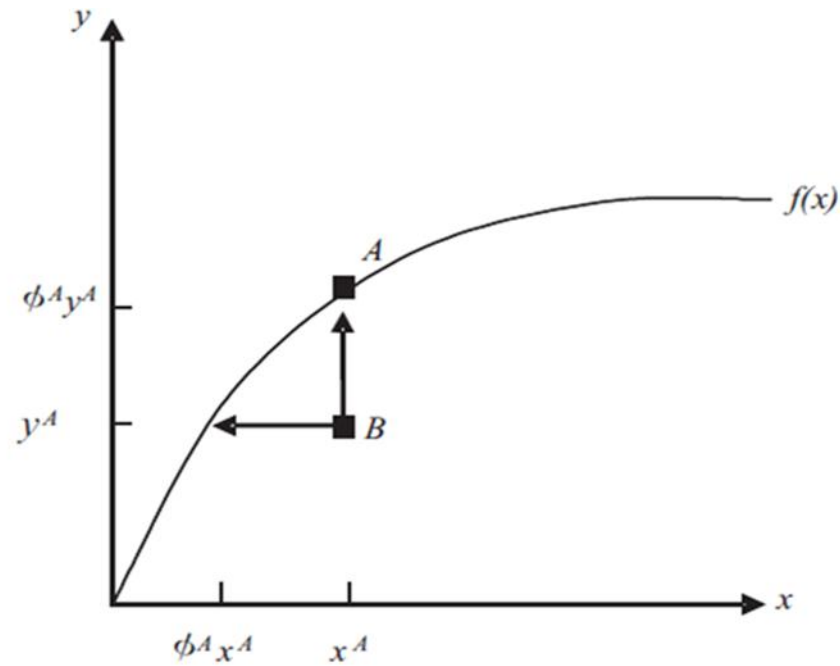
# Marco teórico y metodología

- Concepto de eficiencia de Farrell (1957).



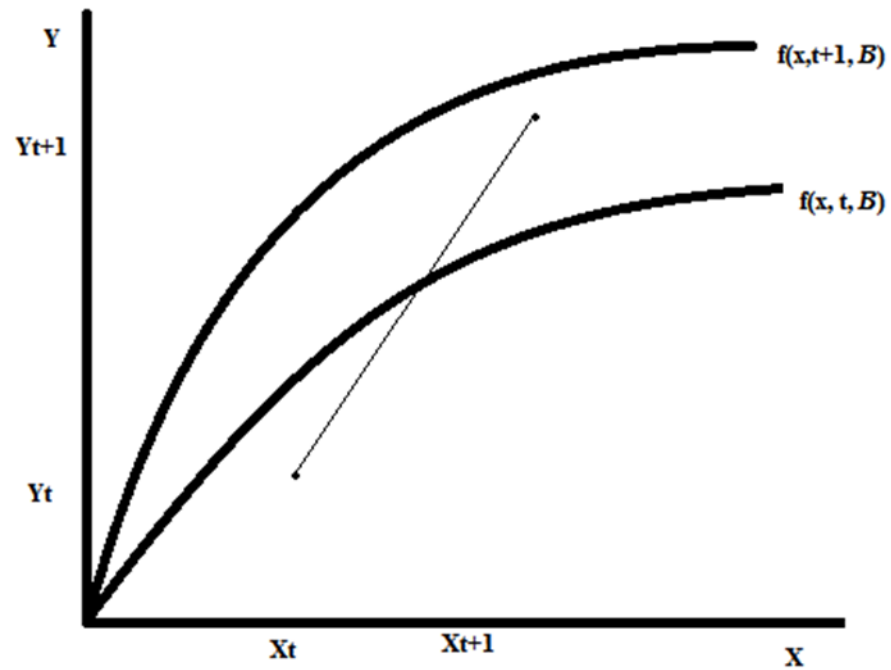
# ¿Qué es la eficiencia técnica (ET)?

- Desde el punto de vista de los productos.





# Cambios en la PTF



# ¿Qué es la eficiencia técnica (ET)?

- Como base , considérese una función de producción de datos panel:

$$Y_{it} = f(x_{jit}; \alpha) \exp(\varepsilon_{it}) \quad q(2)$$

- Donde  $i=1,2,3,\dots,I$  representando las unidades de corte transversal,  $t=1,2,3,\dots,T$  que representa los periodos de tiempo
- El producto para este caso es el PIB del departamento.

$$\varepsilon_{it} = v_{it} - u_{it}$$

“Revisar (Battese y Coelli; 1988), quienes determinan tras la ampliación del trabajo de (Jondrow et al; 1982), que la eficiencia técnica es invariante en el tiempo, para el caso de usar datos de panel”

# ¿Qué es la eficiencia técnica (ET)?

“En otros trabajos, como (Battese y Coelli; 1992), se trabaja con eficiencia técnica que cambia en el tiempo para datos de panel”

- Asumiendo la posibilidad de cambio, se define que:

$$u_{it} = \eta_t u_i \quad q(3)$$

- Se supone entonces que:

$$\eta_t = \exp \{ -\delta(t - T) \}$$

- Cuando:

$\delta > 0$   $\longrightarrow$  la eficiencia técnica se eleva a una tasa decreciente

$\delta < 0$   $\longrightarrow$  la eficiencia técnica disminuye una tasa creciente

$\delta = 0$   $\longrightarrow$  la eficiencia técnica se mantiene igual

## ¿Qué es la eficiencia técnica (ET)?

- Se estima la eficiencia técnica por medio de la media mínima de los errores predichos al cuadrado mediante la siguiente ecuación:

$$TE_{it} = E(\exp(-u_{it})|\varepsilon_i) \quad q(4)$$

$$= \left[ \frac{1 - \varphi\left(\eta_t \sigma_* - (\mu_{*i}/\sigma_*)\right)}{1 - \varphi\left(-(\mu_{*i}/\sigma_*)\right)} \right] \exp\{-\eta_t \mu_{*i} + 0.5 \eta_t^2 \sigma_*^2\} \quad q(5)$$

- Donde:

$$\mu_{*i} = \left[ \frac{\mu \sigma_v^2 - \eta' \varepsilon_i \sigma_u^2}{\sigma_v^2 + \eta' \eta \sigma_u^2} \right] \quad q(6)$$

$$\sigma_*^2 = \left[ \frac{\sigma_u^2 \sigma_v^2}{\sigma_v^2 + \eta' \eta \sigma_u^2} \right] \quad q(7)$$

# ¿Qué es la eficiencia técnica (ET)?

- Se tiene que:

$$\eta' = (\eta_1 \eta_2 \eta_3 \eta_4 \dots \eta_T)$$

- La translogaritmica a estimar es entonces:

$$\begin{aligned} \ln Y_{it} = & \alpha_0 + \alpha_k * \ln(K_{it}) + \alpha_L * \ln(L_{it}) + \alpha_t * t + 1/2[\alpha_{kk} * (\ln(K_{it}))^2 + \alpha_{ll} \\ & * \ln(L_{it})^2 + \alpha_{tt} * t^2] + \alpha_{kl} * \ln(K_{it})\ln(L_{it}) + \alpha_{kt} * t\ln(K_{it}) + \alpha_{lt} \\ & * t\ln(L_{it}) + v_{it} - u_{it} \quad q(8) \end{aligned}$$

- Para los datos de  $K$  y  $L$  se uso la serie de años 2000-2011 que se encuentran en la base de datos del DANE. [http://www.dane.gov.co/index.php?option=com\\_content&view=article&id=129&Itemid=86](http://www.dane.gov.co/index.php?option=com_content&view=article&id=129&Itemid=86) y en el Informe de Coyuntura Económica Regional – ICER-2000 al 2011

## ¿Qué es la eficiencia técnica (*ET*)?

- Para estimar los factores que contribuyen o determinan la ineficiencia técnica, se estima un modelo como el presentado en la ecuación 9

$$ET = \beta_0 + \beta_1 z_{1it} + \beta_2 z_{2it} + \beta_3 z_{3it} + \dots + \beta_n z_{nit} + \xi_{it} \quad (9)$$

- Se asume que el término de error es (*iid*) con media cero y varianza es constante.

# Resultados

La estimación de la eficiencia a partir de la función de producción translogaritmica, ofrece los siguientes resultados desde el uso del software *Frontier4.2* en la Tabla 2.

Tabla 2  
Parámetros Estimados de la Función de Producción

Variable	Parámetro	Coefficiente	standard-error
<i>Intercepto</i>	$\alpha_0$	6.2805**	0.24886105E+01
<i>LnK</i>	$\alpha_k$	0.269**	0.46219879E+00
<i>LnL</i>	$\alpha_l$	0.689	0.54052530E+00
<i>T</i>	$\alpha_t$	-0.193*	0.75852116E-01
$0,5*(LnK)^2$	$\alpha_{kk}$	-0.00334**	0.42758444E-01
$0,5*(LnL)^2$	$\alpha_{ll}$	-0.0687**	0.607711078E-01
$0.5*(T)$	$\alpha_{tt}$	-0.00618	0.41790470E-02
$(LnK)*(LnL)$	$\alpha_{kl}$	0.00247**	0.50245455E-01
$T*(LnK)$	$\alpha_{kt}$	0.0328*	0.70324302E-02
$T*(LnL)$	$\alpha_{lt}$	-0.0411	0.84073659E-02
<i>sigma-squared</i>	$\sigma^2$	0.6527	0.26292436E+01
<i>gamma</i>	$\gamma$	0.990	0.47671844E-02
<i>mu</i>	$\mu$	0.974	0.32587251E+00
<i>eta</i>	$\delta$	0.038*	0.20253190E-01

\*\*Significancia al 5%

\*\*\*Significancia al 1%

# Eficiencia Técnica

## Eficiencia Técnica

Departamento	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	Promedio	Posición
Antioquia	0.81	0.79	0.76	0.82	0.81	0.81	0.79	0.81	0.80	0.81	0.82	0.80	0.804	13
Atlántico	0.84	0.81	0.78	0.77	0.73	0.69	0.81	0.82	0.81	0.86	0.84	0.83	0.801	15
Bogotá, D.C.	0.88	0.87	0.85	0.86	0.86	0.88	0.87	0.89	0.89	0.89	0.90	0.90	0.878	4
Bolívar	0.88	0.87	0.87	0.89	0.87	0.85	0.90	0.91	0.90	0.90	0.89	0.86	0.883	3
Boyacá	0.78	0.72	0.68	0.74	0.66	0.67	0.73	0.81	0.88	0.78	0.73	0.77	0.746	19
Caldas	0.83	0.84	0.86	0.84	0.84	0.84	0.80	0.81	0.79	0.79	0.77	0.73	0.811	11
Caquetá	0.77	0.85	0.80	0.88	0.89	0.78	0.78	0.86	0.86	0.58	0.32	0.94	0.777	17
Cauca	0.84	0.73	0.83	0.79	0.74	0.70	0.64	0.72	0.63	0.60	0.51	0.47	0.685	22
Cesar	0.81	0.91	0.88	0.81	0.81	0.83	0.91	0.92	0.80	0.70	0.55	0.77	0.809	12
Córdoba	0.90	0.78	0.85	0.88	0.74	0.79	0.88	0.92	0.89	0.92	0.93	0.55	0.837	7
Cundinamarca	0.84	0.85	0.83	0.87	0.87	0.85	0.84	0.81	0.79	0.80	0.81	0.84	0.835	8
Huila	0.92	0.91	0.92	0.94	0.90	0.87	0.83	0.93	0.86	0.85	0.80	0.88	0.885	2
La Guajira	0.78	0.53	0.69	0.88	0.89	0.86	0.82	0.74	0.87	0.83	0.83	0.79	0.793	16
Magdalena	0.76	0.79	0.61	0.73	0.67	0.70	0.75	0.78	0.71	0.72	0.74	0.78	0.728	20
Meta	0.77	0.74	0.81	0.71	0.72	0.51	0.47	0.12	0.12	0.14	0.12	0.16	0.451	23
Nariño	0.89	0.86	0.87	0.83	0.80	0.80	0.81	0.83	0.74	0.83	0.76	0.76	0.816	10
Norte de Santander	0.85	0.86	0.81	0.88	0.86	0.88	0.82	0.88	0.78	0.85	0.86	0.85	0.848	6
Quindío	0.86	0.84	0.80	0.85	0.69	0.71	0.84	0.91	0.90	0.89	0.88	0.81	0.831	9
Risaralda	0.79	0.80	0.80	0.77	0.77	0.71	0.72	0.77	0.73	0.77	0.79	0.67	0.758	18
Santander	0.89	0.91	0.92	0.91	0.91	0.91	0.91	0.93	0.94	0.95	0.95	0.94	0.922	1
Sucre	0.86	0.87	0.83	0.87	0.84	0.87	0.83	0.88	0.90	0.92	0.89	0.87	0.869	5
Tolima	0.81	0.76	0.76	0.81	0.87	0.86	0.77	0.71	0.52	0.57	0.55	0.55	0.712	21
Valle del Cauca	0.84	0.85	0.82	0.83	0.83	0.81	0.76	0.83	0.79	0.78	0.76	0.74	0.803	14



# Resultados

Ahora bien, para explicar debidamente que variables influyen en la eficiencia técnica de los departamento en general, se usan las variables que se encuentran en la (Tabla 1). La estimación se realizó usando la metodología de datos de panel, se usaron todas las variables en primera instancia y se procedió a ir eliminando aquellas que no fueron significativas. Los resultados de muestran a continuación en la (Tabla 4).

Tabla 4

Eficiencia	2000	2008	P>[t]
	Coefficiente	Std.Err	
Educación	-0,043264	0,09846	0,664
Desempleo	0,003268	0,00278	0,234
Energía el	-0,000465	0,00019	0,819
Comercio*	0,000956	0.00065	0.098
Petróleo***	-0,010211	0,00015	0,00001
Costa	-0,027007	0,01985	0,277
Constante***	0,815436	0.10457	0,00001

# A partir de la eficiencia técnica podemos obtener un aproximación para la variación de la PTF en el tiempo

- En trabajos anteriores (Kumbhakar y Lovell, 2000), se hace referencia a la posibilidad de descomponer la productividad total de los factores (PTF) en tres componentes. Los componentes son la tasa de cambio tecnológico ( $CT$ ), componentes de escala ( $CE$ ) y el cambio de la ineficiencia técnica ( $CIT$ ). La tasa de progreso tecnológico se puede estimar mediante las ecuaciones 10, 11 y 14.

$$CT = \left[ \frac{\partial \text{Ln}(y_{it})}{\partial t} \right] \quad q(10)$$

$$CE = (e - 1) \sum_j \left( \frac{e_j}{e} \right) \dot{x}_j \quad q(11)$$

- Tal que:

$$e = e_k + e_L$$

# A partir de la eficiencia técnica podemos obtener un aproximación para la variación de la PTF en el tiempo

- Se tiene también que:

$$e_k = \alpha_k + \alpha_{kk} * \text{Ln}(K_{it}) + \alpha_{kL} * \text{Ln}(L_{it}) + \alpha_{kt} * t \quad q(12)$$

$$e_L = \alpha_L + \alpha_{LL} * \text{Ln}(L_{it}) + \alpha_{kL} * \text{Ln}(K_{it}) + \alpha_{Lt} * t \quad q(13)$$

- El siguiente componentes es la eficiencia técnica:

$$\dot{ET} = - \frac{\partial u_{it}}{\partial t} \quad q(14)$$

- Los cambios en la eficiencia técnica pueden ser interpretados como la velocidad con la que se mueve la entidad desde y hacia la frontera de producción.

# A partir de la eficiencia técnica podemos obtener un aproximación para la variación de la PTF en el tiempo

- El cambio en la productividad total de los factores se puede presentar de la siguiente manera:

$$\dot{PTF} = CT + CE + \dot{ET} \quad q(15)$$

# Crecimiento de la PTF

Departamentos	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	TP Promedio
Antioquia	0.0328	0.0343	0.0335	0.0293	0.0279	0.0232	0.0190	0.0115	0.0080	0.0040	-0.0017	-0.0042	0.0181
Atlántico	0.0501	0.0548	0.0566	0.0544	0.0522	0.0509	0.0384	0.0303	0.0289	0.0211	0.0168	0.0167	0.0393
Bogotá, D.C.	0.0227	0.0263	0.0275	0.0234	0.0194	0.0150	0.0097	0.0013	-0.0043	-0.0089	-0.0146	-0.0189	0.0082
Bolívar	0.0969	0.0986	0.1009	0.0960	0.0956	0.0907	0.0871	0.0795	0.0755	0.0705	0.0612	0.0578	0.0842
Boyacá	0.1014	0.1108	0.1128	0.1094	0.1081	0.1022	0.1039	0.0809	0.0624	0.0696	0.0683	0.0620	0.0910
Caldas	0.0501	0.0499	0.0518	0.0474	0.0421	0.0404	0.0369	0.0290	0.0240	0.0233	0.0193	0.0156	0.0358
Caquetá	0.0905	0.0838	0.0821	0.0773	0.0788	0.0773	0.0726	0.0394	0.0337	0.0615	0.0718	0.0232	0.0660
Cauca	0.1102	0.1087	0.1073	0.0999	0.0923	0.0848	0.0820	0.0674	0.0676	0.0651	0.0598	0.0574	0.0835
Cesar	0.0717	0.0737	0.0712	0.0702	0.0655	0.0689	0.0625	0.0590	0.0579	0.0539	0.0500	0.0429	0.0623
Córdoba	0.1463	0.1445	0.1466	0.1503	0.1431	0.1376	0.1290	0.1214	0.1212	0.1138	0.1087	0.1020	0.1304
Cundinamarca	0.0641	0.0701	0.0700	0.0618	0.0574	0.0541	0.0502	0.0434	0.0370	0.0313	0.0224	0.0136	0.0479
Huila	0.0795	0.0769	0.0747	0.0743	0.0713	0.0735	0.0683	0.0532	0.0493	0.0454	0.0395	0.0357	0.0618
La Guajira	0.0611	0.0484	0.0482	0.0513	0.0447	0.0410	0.0461	0.0388	0.0348	0.0082	0.0091	0.0217	0.0378
Magdalena	0.0762	0.0776	0.0812	0.0786	0.0808	0.0797	0.0766	0.0581	0.0553	0.0519	0.0495	0.0424	0.0673
Meta	0.1071	0.1025	0.1030	0.1003	0.0986	0.1001	0.0954	0.1312	0.1294	0.1235	0.1164	0.1109	0.1099
Nariño	0.0527	0.0532	0.0613	0.0599	0.0556	0.0612	0.0552	0.0386	0.0391	0.0331	0.0315	0.0271	0.0474
Norte de Santander	0.0544	0.0481	0.0559	0.0435	0.0403	0.0357	0.0351	0.0219	0.0255	0.0188	0.0177	0.0105	0.0339
Quindío	0.0544	0.0529	0.0547	0.0543	0.0534	0.0377	0.0268	0.0146	0.0140	0.0186	0.0174	0.0080	0.0339
Risaralda	0.0592	0.0591	0.0593	0.0541	0.0469	0.0399	0.0335	0.0210	0.0203	0.0156	0.0106	0.0147	0.0362
Santander	0.0739	0.0772	0.0832	0.0803	0.0814	0.0777	0.0752	0.0661	0.0631	0.0565	0.0500	0.0455	0.0692
Sucre	0.1090	0.1172	0.1199	0.1187	0.1177	0.1154	0.1193	0.1006	0.0924	0.0843	0.0824	0.0862	0.1053
Tolima	0.0806	0.0849	0.0874	0.0849	0.0778	0.0774	0.0699	0.0704	0.0671	0.0638	0.0582	0.0570	0.0733
Valle del Cauca	0.0464	0.0473	0.0508	0.0484	0.0454	0.0437	0.0416	0.0297	0.0260	0.0221	0.0176	0.0129	0.0360

## Resultados *beta-convergencia*

Ahora, se observara si existe convergencia en términos de eficiencia técnica dentro de la región en el tiempo. Esta se prueba mediante la *beta-convergencia* establecida por Baumol (1986) quien estima lo anterior mediante la siguiente regresión.

$$\text{Ln} \left( \frac{ET_1}{ET_0} \right) = \theta_0 + \theta_1 \ln(ET_0) + \omega \quad (q16)$$

Tabla 6  
Beta-Convergencia

Coefficiente	Valor	P-Valor
$\theta_0$	-0.0044301	0,512
$\theta_1$	-0.5966405	0.000

# Referencias

- Acemoglu, D; Zilibotti, F. (1998) “Productivity Differences”, Seminar papper Nº 660
- Battese, G., Coelli, T. (1988). “Prediction of firm-level technical efficiencies with a generalised production function and panel data”. *Journal of Econometrics* 38, 387-399.
- Battese, G., Coelli, T. (1995). “A model for technical inefficiency effects in a stochastic frontier production function for panel data”. *Empirical Economics* 20, 325-332
- Coelli, T, A guide to frontier version 4.1: a computer program for stochastic Frontier production and cost function estimation, *CEPA Working Paper 96/07,1996*, Center for Efficiency and Productivity Analysis, University of New England, Armidale.
- Coelli, T., Perelman, S., Romano, E. (1999). “Accounting for environmental influences in stochastic frontier models: With application to international airlines”. *Journal of Productivity Analysis* 11, 251-273.

# Referencias

- Easterly, W; Levine, R. (2001) “It's Not Factor Accumulation: Stylized Facts and Growth Models, *Journal of Monetary Economics*
- Farrel, M. J. (1957), “The measurement of productive efficiency”, *Journal of The Royal Statistical Society*, Series A, General, 120, pp. 253-281
- Gumbau, M. (1998), Regional Efficiency: a stochastic frontier approach, *Applied Economic Letters*, 5, pp.723-726.
- Gumbau, M. (2000), Efficiency and technical progress: sources of convergence in the Spanish regions *Applied Economics*, 32, pp.467-726.
- Harberger, A. (1972), *Project Evaluation*, University of Chicago Press,
- Krugman, P. (1994), The Myth of Asia's Miracle, *Foreign Affairs*, 73 , pp. 62–78.
- Kumbhakar, S. C. (1990), Production frontier, panel data, and time-varying technical efficiency, *Journal of Econometrics*, 46, pp.201-212.
- Kumbhakar, S. C. (2000), and C. A. K. Lovell, *Stochastic Frontier Analysis*, Cambridge University Press.