

## Solución Numérica de la Ecuación de la Pendiente Suave y su Aplicación en el Diseño de las Obras de Protección de una Marina Náutica en Nayarit México

HERRERA-Israel†, GASCA-José, GALVAN-Arturo & MORENO-Jatziri

*Universidad de Guanajuato Campus Celaya-Salvatierra, Mutualismo 303 Col. Suiza C.P. 38060 Celaya, Gto. México*

Recibido 5 de Enero, 2015; Aceptado 6 de Marzo, 2015

### Resumen

Se presenta la solución numérica de la ecuación de Berkhoff (1971) conocida como la pendiente suave en su forma elíptica para profundidades indefinidas y análogamente para zonas someras considerando la celeridad de grupo de ola en función de la profundidad y de la aceleración de la gravedad. La ecuación se ha subdividido en tres ecuaciones para calcular de forma simultánea la dirección, altura de ola y fase de la ola; la solución del sistema de ecuaciones es por un método numérico determinado con un algoritmo de relajación para el cálculo de la fase de la ola. Se emplea un esquema de diferencias finitas con aproximación elíptica y un mallado tipo staggered-celd con la opción de tener un refinado de malla en zonas donde se encuentren obras de protección o estructuras que modifique el oleaje para su estudio.

La calibración se realizó con la simulación de ejemplos de literatura en su forma analítica que presentan ejemplos de aplicación con condiciones constantes obteniendo valores aceptables (Herrera, 2009). La aplicación del modelo se llevó a cabo en las obras de protección de una marina náutica ubicada en el Guayabitos Nayarit donde se necesita conocer la magnitud de la agitación de la superficie libre generada por la transmisión del oleaje considerando la geometría proyectada para la marina náutica a su paso por la bocana. Los resultados obtenidos de la modelación proponen el tipo y dimensiones de las obras de protección requeridas para minimizar las condiciones de agitación dentro de la marina.

### Modelación Numérica, Oleaje, Obras de Protección

### Abstract

Numerical solution of the mild-slope equation and its application in the design of the breakwater structure of yachting harbor in Nayarit Mexico. We present the numerical solution of the Berkhoff method (1971) known as the mild slope equation in elliptical shape for deep water and similarly for shallow areas considering the speed of wave group depending on the depth and the acceleration of gravity occurs. The equation has been subdivided into three equations simultaneously to calculate the direction, wave height and phase of the wave; solving the system of equations is determined by a numerical method a relaxation algorithm for calculating the phase of the wave. Finite difference scheme with elliptical approach and staggered-celd with the option of a fine mesh in areas where protection works or structures that modify the surf for study are used.

The numerical calibration was performed with simulation examples of literature in its analytically presented examples of application with constant conditions obtaining acceptable values (Herrera, 2009). The application of the model was carried out in protection structures a yachting harbor located in Guayabitos Nayarit where we need to know the magnitude of the agitation of the free surface generated by wave transmission considering the projected yachting harbor geometry passing through the mouth. The results of modeling propose the type and dimensions of protection structures required to minimize the agitation conditions within the yachting harbor.

### Numerical Modeling, Ocean wave, Protection Structures

**Citación:** HERRERA-Israel, GASCA-José, GALVAN-Arturo & MORENO-Jatziri. Solución Numérica de la Ecuación de la Pendiente Suave y su Aplicación en el Diseño de las Obras de Protección de una Marina Náutica en Nayarit México. Revista de Tecnología e Innovación 2015, 2-2:105-114

† Investigador contribuyendo como primer autor.

## Introducción

La interacción del oleaje con el fondo del mar es una de las razones por las que el oleaje se modifica. Como consecuencia de esta interacción de las ondas con el fondo, el tren de ondas u oleaje se transforma dando lugar a varios procesos costeros visibles para un observador desde la costa. Estos procesos de transformación se traducen fundamentalmente en: variación de la altura de la ola y en la dirección de propagación. Llamados refracción, difracción, reflexión y rompiente.

Cada uno de estos fenómenos se ha venido analizando de forma separada mediante métodos gráficos y numéricos. Cabe destacar que en la naturaleza todos los fenómenos están relacionados entre sí, por lo que, en el presente trabajo se describirá la elaboración de un modelo numérico que tome en cuenta varios fenómenos y su aplicación a una zona de estudio cuya problemática principal es la de conocer la agitación u oscilación de la superficie libre provocada por el oleaje incidente.

El modelo numérico desarrollado sobre la solución de la ecuación de Berkhoff (1972) la cual mediante un esquema de diferencias finitas con programación en Matlab se puede modelar el oleaje regular en regiones con batimetría irregular, la discretización de las ecuaciones, solución numérica y ejemplos de validación del modelo se puede consultar en el trabajo de Herrera (2009).

## Materiales y Metodología

### Descripción del modelo de oleaje

La ecuación desarrollada por Berkhoff (1972) conocida también como la ecuación de la pendiente suave, que es una de las ecuaciones que funciona muy bien para simular los fenómenos de refracción-difracción-reflexión, en lugares donde la irregularidad del fondo provocaría concentración de energía durante el avance del frente de ola. Para entender esta ecuación se presenta en su forma general definiendo cada una de sus partes como sigue:

$$\underbrace{\frac{\partial E(x,y,t,f,\theta)}{\partial t}}_1 + \underbrace{\nabla \cdot [C_y(x,y,f) * E(x,y,t,f,\theta)]}_2 = \underbrace{S_w}_3 + \underbrace{S_m}_4 + \underbrace{S_d}_5 + \underbrace{S_f}_6 + \underbrace{S_p}_7 \quad (1)$$

Donde el primer termino representa el índice del cambio temporal del espectro, el segundo término representa la propagación de la energía de la onda, el tercer término representa entradas del viento, el cuarto término representa la redistribución de la energía de la onda entre diversos componentes no lineales que se presenten, el quinto término representa la disipación debido a la rompiente, el sexto término representa las pérdidas debido a la fricción, y el séptimo término representa las pérdidas debido a la filtración.

Se emplea la modelación numérica para resolver la ec. (1) en una aproximación elíptica (ec. 2) que describe la propagación de una onda en la superficie libre periódica y de amplitud finita sobre batimetrías complejas, donde su deformación al aproximarse a zonas de baja profundidad y obstáculos presenta los fenómenos de refracción, difracción y reflexión (Panchang et al, 1991).

$$\nabla(C_{cg}\nabla\eta) - \frac{c_g}{c} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = 0 \quad (2)$$

Donde:

$\eta(x,y)$  es el nivel o elevación de la superficie libre (m)

$C(x,y)$  Celeridad ó velocidad de fase (m/s)

$C_g(x,y)$  Celeridad de grupo (m/s)

La solución de la ecuación de Berkhoff es trabajada y expresada en función de la razón de flujo del oleaje en sus componentes x e y (Fuentes, 1996), esto mediante un esquema implícito en el tiempo por medio de las siguientes ecuaciones en diferencias finitas.

$$c^2 \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{\partial Q_x}{\partial t} \quad (3)$$

$$c^2 \frac{\partial \eta}{\partial y} = -\frac{\partial Q_y}{\partial t} \quad (4)$$

En donde  $Q(x,y)$  es la razón del flujo en el plano horizontal (m/s).

Para la solución de la ecuación de la variación de la superficie libre debido al oleaje en función de las razones de flujo antes mencionadas se tiene:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{1}{n} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (nQ_x) + \frac{\partial}{\partial y} (nQ_y) \right] \quad (5)$$

$$n = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{2kh}{\sinh(2kh)} \right) \quad (6)$$

Donde:

$n(x,y)$  Factor de grupo

$k(x,y)$  Número de onda ( $2\pi/L$ )

$h(x,y)$  Profundidad (m)

Este tipo de ecuaciones tienen la ventaja de disponer de los valores de las razones del flujo y que permiten encontrar la dirección del oleaje y plantear la presencia de obstáculo de una forma sencilla.

Condiciones de frontera

Para obtener la propagación del oleaje en las fronteras libres, se aplica la ley de Snell, la cual permite que el oleaje salga del dominio de estudio sin modificar su dirección ni magnitud; a los obstáculos o estructuras dentro del dominio se le consideran fronteras sólidas, por lo que estas se proponen como una pared totalmente vertical, esta pared presenta 3 condiciones de reflexión las cuales se manifiestan con un coeficiente de ( $K_L$ ), cuyo valor está limitado entre 0 y 1 (0 para una estructura que no presenta reflexión, 0.5 para una parcialmente reflejante y 1 para una condición totalmente reflejante). Lo anterior, se aplica en todo el perímetro de las estructuras.

Para la obtención de la elevación de la superficie libre en los extremos de cualquier obstáculo se tienen las siguientes ecuaciones:

$$\eta_0^{n+1} = (1 + K_L) * \eta_{\left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)}^n - K_L \eta_0^{n-1} \quad (7)$$

$$\eta_L^{n+1} = (1 + K_L) * \eta_{\left(L-\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)}^n - K_L \eta_0^{n-1} \quad (8)$$

La ec. (7) es empleada para el inicio de obstáculo con longitud infinita, y la ec. (8) es utilizada para el final del obstáculo. Para el cálculo de una onda cuasi-oscilatoria resulta de la superposición de una ola incidente con altura ( $H_i$ ) y una onda viajando en sentido opuesto con una altura menor ( $H_r$ ). Esta reducción en la altura de la ola y el desfase entre incidente y reflejada están asociados y la superficie resultante puede expresarse:

$$\eta_{i,j}^{n+1} = \frac{H_{i,j}}{2} \cos \left[ \left( Kx_{i,j} X_{i,j} \cos(\theta_{i,j}) \right) + \left( Ky_{i,j} Y_{i,j} \sin(\theta_{i,j}) \right) - \frac{2\pi}{T} * t \right] \quad (9)$$

Donde se considera que el oleaje reflejado por cualquier obstáculo sale de la región de estudio.

Por último, el ángulo o dirección del oleaje puede ser estimado por la relación entre las fases ( $Q_x^{n+1}$ ) y ( $Q_y^{n+1}$ ):

$$\alpha = \tan^{-1} \left( \frac{Q_y^{n+1}}{Q_x^{n+1}} \right) \tag{10}$$

Validación del modelo

Para efectuar la validación del módulo de oleaje, se diseñaron dominios similares a los ejemplos teóricos de la literatura, con la finalidad de reproducir los fenómenos de refracción, difracción y reflexión, determinando alturas de ola, ángulos de incidencia y comparaciones entre las soluciones analíticas y los resultados de la modelación.

Resonancia en un puerto rectangular

Como primer caso de validación se tomó el problema de resonancia en un puerto rectangular (fig. 1), cuya solución analítica fue presentada por Unluate et al (1973) y las soluciones numéricas presentadas por Maa *et al.* (1997) y Lee (1971). La geometría del puerto es de 0.3212 m de longitud por 0.0605 m de ancho y una profundidad de 0.2576 m; el ángulo de incidencia del oleaje es de cero grados y la altura de ola es de 0.01m; los parámetros de la modelación se pueden observar en la tabla (1).

| Parámetros        |               |
|-------------------|---------------|
| H(m)              | 0.01          |
| T(s)              | Varía         |
| $\theta$ (grados) | 0.00          |
| h(m)              | 0.2576        |
| $\Delta x$ (m)    | 0.10          |
| $\Delta y$ (m)    | 0.10          |
| W x L (m)         | 4.497 x 1.845 |

|   |         |
|---|---------|
| MP x NP   | 45 x 20 |
| Tiempo de cómputo (s)   | 41      |
| W, L son el ancho y largo del dominio de estudio                            |         |
| MP, NP, son los números de celdas en la dirección “x” y “y” respectivamente |         |

Tabla 1 Parámetros usados para la validación del modelo de oleaje

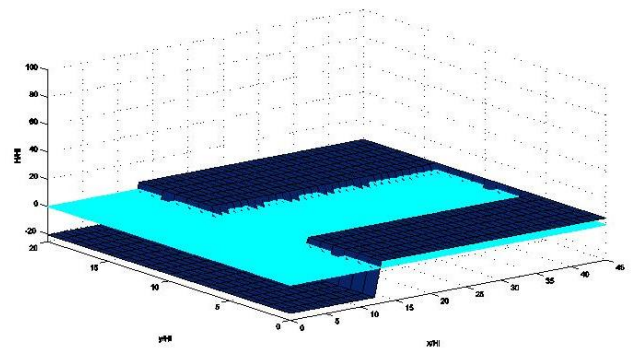


Figura 1 Geometría del puerto

El dominio se diseño con 45 x 20 celdas utilizando  $\Delta x = \Delta y = 0.1$  se comparó con la solución obtenida por Maa *et al.* (1997), la cual se presenta en la figura (2) las alturas de ola normalizadas.

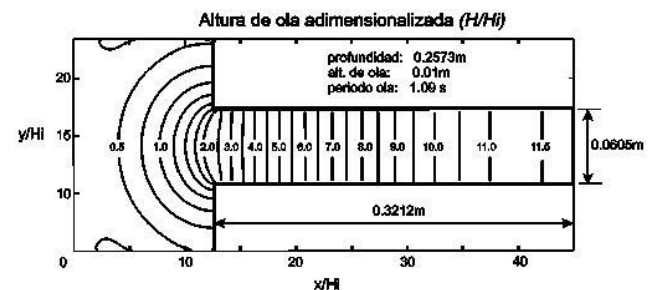


Figura 2 Solución presentada por Maa *et al.* (1997)

En la figura (3) se presenta el resultado obtenido por el modelo numérico desarrollado, donde se consideró que en todas las paredes se presentan un coeficiente de reflexión igual a 1.0 que es una condición totalmente reflejante.

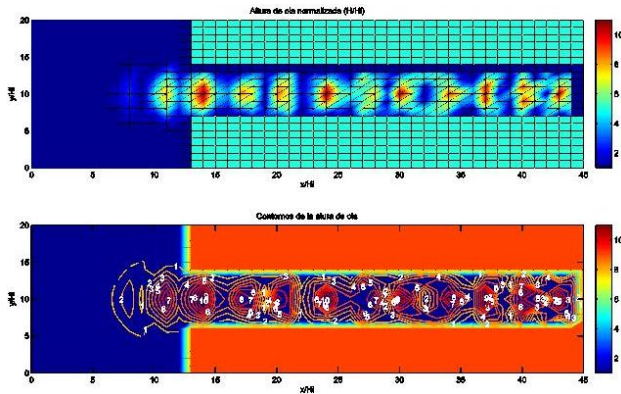


Figura 3 Resultados de la simulación numérica

Posteriormente se realizó una comparación cuantitativa entre las soluciones obtenidas por Lee (1971) y Maa *et al.* (1997), con coeficientes de reflexión de 0 a 4 de la resonancia que presenta el puerto con diversos periodos de oleaje incidente. La figura (4) muestra los resultados del modelo con un error relativo porcentual entre valores de la solución analítica y los valores promedio calculados de 3.75%, esto debido a que se considera la reflexión en las caras perpendiculares al sentido del oleaje, lo cual presenta una pequeña agitación y que es más apegado a la realidad.

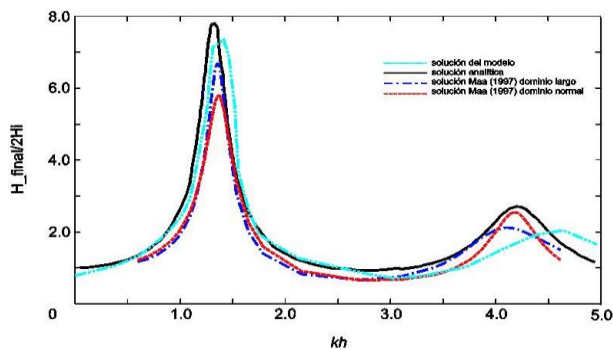


Figura 4 Comparación entre distintas soluciones del análisis de resonancia del puerto

### Resultados y Aplicación

La marina náutica en estudio se ubica al sur del estado de Nayarit en el municipio de Compostela localidad de Los Ayala (fig. 5)



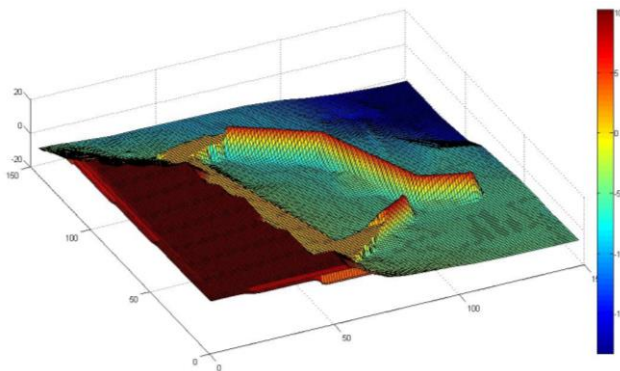
Figura 5 Localización de la marina náutica

El objeto del estudio es modelar la agitación que se origina dentro de la marina por efectos del oleaje incidente con dirección NW que es la predominante en la región. Con la finalidad de monitorear los diferentes niveles de agitación que se presentan en el interior de la marina y en algunos puntos exteriores de interés, se ubicaron 10 puntos de control o visores, los cuales permiten un diagnóstico más específico, en la figura (6) se presenta un diagrama de la Marina con la ubicación de los visores.



Figura 6 Ubicación de los puntos de control o visores durante las simulaciones

Los datos de la propagación del oleaje como son altura, periodo y ángulo de incidencia en el dominio de estudio son conocidos y son suministrados al modelo numérico; de forma que la malla de estudio (fig. 7) presenta 145 x 148 celdas con espaciamiento constante para ambas direcciones de 5 mts.



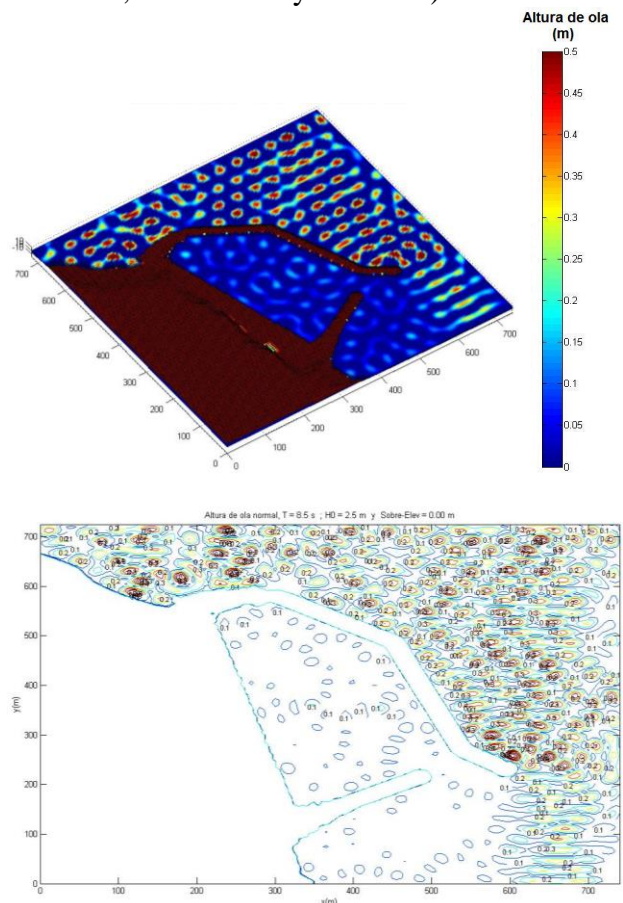
**Figura 7** Malla numérica para la simulación de la marina náutica

Para las simulaciones del oleaje incidente sobre las obras de protección de la marina y su propagación dentro de esta, se proponen 4 escenarios de oleaje, uno bajo condiciones normales y los restantes bajo condición extrema.

1. Oleaje normal dirección NW.
2. Oleaje huracanado dirección NW con periodo de retorno de 10 años
3. Oleaje huracanado dirección NW con periodo de retorno de 15 años
4. Oleaje huracanado dirección NW con periodo de retorno de 20 años

Simulación de agitación en el interior de la Marina con oleaje normal

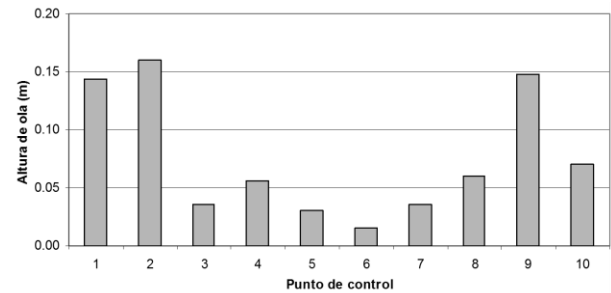
De acuerdo al análisis de refracción-difracción y de alturas de ola, el oleaje al que resulta más vulnerable la marina en condiciones normales es el proveniente de la dirección Noroeste (NW) debido a tres principales factores, la frecuencia de presencia y la forma de arribo a la zona de estudio y a la altura de ola, la marina es morfológicamente protegida, en la figura 8 se analiza la agitación al interior de la marina en el escenario descrito (Dirección Noroeste,  $H = 3.21$  m y  $T = 8.5$  s).



**Figura 8** Agitación en el interior de la marina con oleaje proveniente NW

En la figura (8) se aprecian las diferentes alturas de ola que se presentan en el interior de la marina, a través de una escala de colores, la cual va de cero en color azul a 0.5 m en color marrón. En el interior de la marina identificamos el color azul oscuro como predominante con algunos toques más claros, lo cual, expresa una altura del orden inferior a los 0.10 m y solo en algunos puntos es superada esta altura pero sin exceder los 0.20 m de altura de ola, generando una zona de gran calma.

La figura (9) presenta las alturas de ola de los puntos de control donde se puede observar claramente las variaciones de altura de ola que existen en el interior de la marina. En los puntos 1 y 2 podemos observar alturas relativamente superiores en relación al resto de los puntos, producidas por los efectos reflexión sin embargo su altura es del orden de los 0.14 y 0.16 m respectivamente, alturas de ola que no representa ningún riesgo a la navegación o ataque de embarcaciones. Entre los puntos 3 al 8 ninguno supera los 6 cm de altura de ola, lo cual representa que la protección morfológica de la zona de estudio, así como el arreglo de los rompeolas propuestos satisface las condiciones de navegabilidad en condiciones climáticas normales. Los puntos 9 y 10 presentan un incremento en la altura de ola, este efecto es definido debido que la ubicación de estos puntos esta al exterior de las obras de protección, sin embargo, sus valores no superan los 15 cm de altura, es importante identificar estos valores, ya que corresponden a la boca de acceso de la marina.



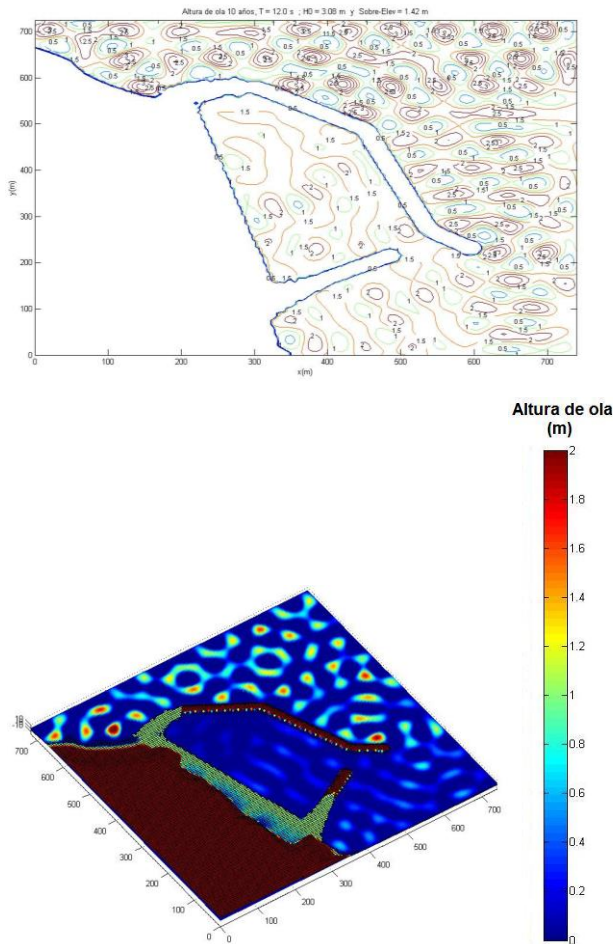
**Figura 9** Alturas de ola determinada en los puntos de control para oleaje normal

Simulación de agitación en el interior de la marina con oleaje huracanado

Para la simulación de oleaje huracanado, se consideraron diferentes periodos de retorno (10, 15 y 20 años), para los cuales de igual forma se estimo la sobreelevación que generan en la zona de estudio; en las siguientes figuras se presentan los resultados obtenidos.

#### Periodo de retorno de 10 años

Para las condiciones de oleaje huracanado, las alturas que se generan en la región de aguas profundas generalmente excede las condiciones de navegabilidad, sin embargo el abrigo propuesto para generar la zona de calma al interior de la marina, mitiga notablemente la agitación; en las figura (10), se muestran los resultados obtenidos para un periodo de retorno de 10 años, altura de ola  $H=6.86$  m, periodo  $T=12$  s y sobreelevación  $S = 1.42$  m.

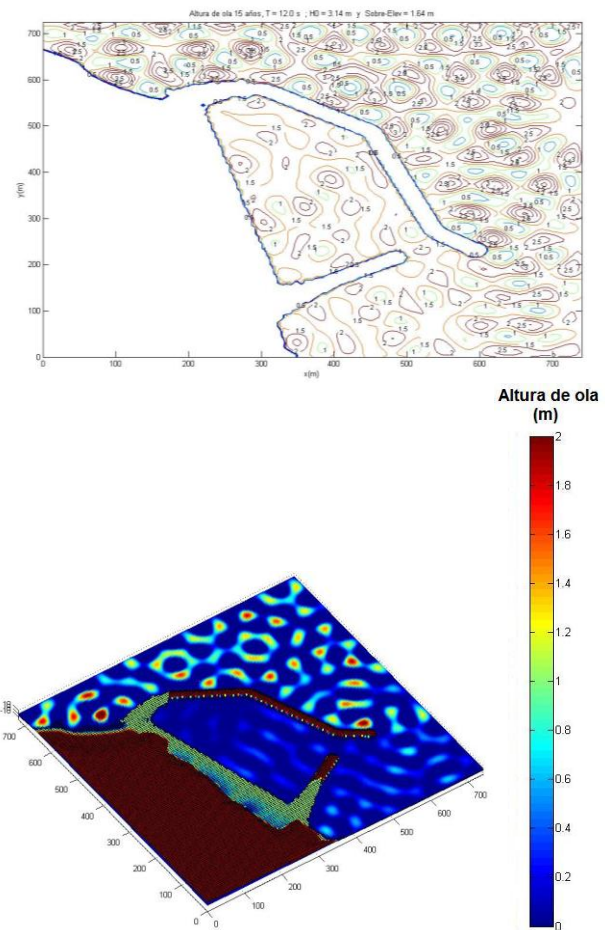


**Figura 10** Perspectiva de la agitación en el interior de la marina con oleaje huracanado periodo de retorno de 10 años, dirección del oleaje NW, escala grafica de 0 a 2.0 m

La figura (10) muestra los resultados que se obtuvieron de la simulación realizada para un periodo de retorno de 10 años, en donde se puede apreciar que al interior de la marina, no se alcanzan niveles superiores a los 0.5m.

Periodo de retorno de 15 años

Los resultados de las simulaciones para un periodo de retorno de 15 años (altura de ola  $H=7.28$  m, periodo  $T=12$  s y sobre elevación  $S=1.64$  m), se presenta en la figura (11) la agitación mediante una escala de colores que representan las alturas de ola en la misma escala (0 – 2m) que en la simulación descrita anterior.



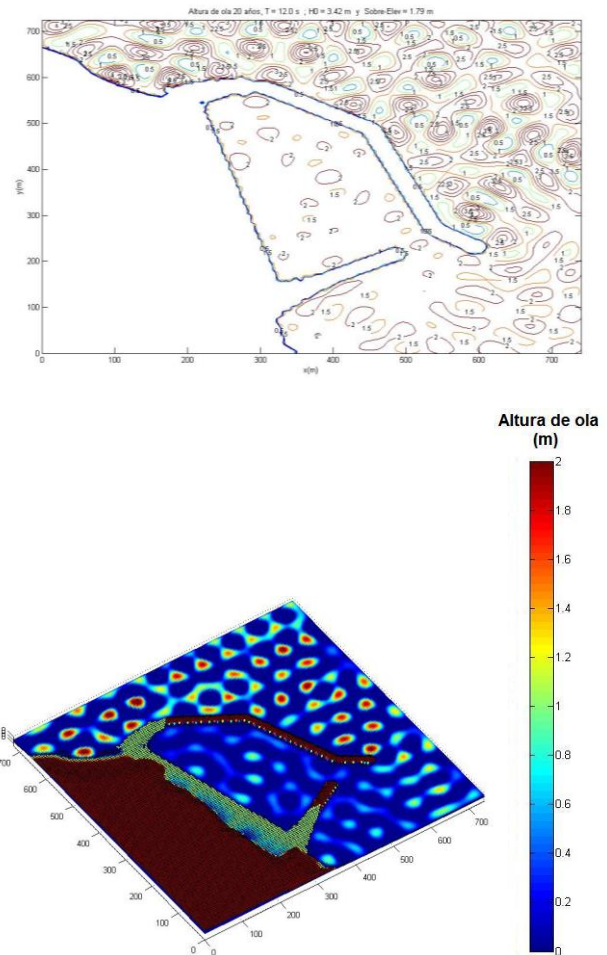
**Figura 11** Perspectiva de la agitación en el interior de la marina con oleaje huracanado periodo de retorno de 15 años, dirección del oleaje NW, escala grafica de 0 a 2.0 m



La figura (11), muestra una vista en perspectiva tridimensional, exponiendo que la protección que brindan los rompeolas propuestos, permite una agitación al interior de la marina que no excede los 0.50 m, lo cual refleja una condición favorable para el atraque de las embarcaciones, sin poner en riesgo ni la integridad de los muelles, ni la de las embarcaciones.

Periodo de retorno de 20 años

Esta simulación representa el caso más desfavorable, con altura de ola de 7.57 m, periodo de 12 s y sobre elevación de 1.79 m, Los resultados se presentan en la figura (12), en donde se observa que las alturas de agitación de oleaje al interior de la marina son notablemente superiores a los casos superiores, sin embargo, no presentan una condición de riesgo, las alturas sobrepasan los 0.50 m (que en ninguno de los casos anteriores era superado), en algunos puntos, sin embargo, ninguno excede los 0.70 m, la zona que presenta mayor agitación es al centro, ya que es en esta región donde se concentran los oleajes y las reflexiones de las diferentes fronteras de la marina.



**Figura 12** Perspectiva de la Agitación en el interior de la Marina con oleaje huracanado periodo de retorno de 20 años, dirección del oleaje NW, escala grafica de 0 a 2.0 m

La figura (12), muestra una vista en perspectiva tridimensional, exponiendo que la protección que brindan los rompeolas propuestos, permite una agitación al interior de la marina que no excede los 0.70 m, aun que esta condición puede presentar un riesgo moderado para el atraque de las embarcaciones, la frecuencia de presencia de esta agitación es de 20 años.

**Conclusiones**

A partir de los resultados descritos, se plantean las siguientes conclusiones.

El arreglo de las obras de protección, cumple satisfactoriamente su función, el propiciar una agitación mínima al interior de la dársena de la Marina, para condiciones normales.

Para las condiciones de oleaje extraordinario, la agitación que se presenta al interior de la marina no presenta ningún riesgo para los periodos de retorno de 10 y 15 años, sin embargo, para el correspondiente a 20 años de periodo de retorno las condiciones pueden resultar peligrosas para algunas embarcaciones o para las instalaciones de la marina, por lo que se sugiere identificar las zonas de menor agitación y dirigir hacia estas zonas las embarcaciones presentes, y así mismo, impedir el atraque o navegación de embarcaciones en las zonas de mayor agitación.

En función de los límites de operatividad al interior de la marina, se indica que la agitación de la superficie libre no pueden exceder una altura de ola de 0.60 m en un periodo mayor al 1.0 % anual.

**Referencias**

Berkhoff, J.C.W (1972) "Computation of combined refraction-diffraction", Jour. Int. Conf. on Coastal Eng., Vol 13, pp. 471-490

Fuentes, M.O. (1996) "Propagación del oleaje en la proximidad de la costa", UNAM, Tesis Doctoral.

Herrera, I.E. (2009) "Acoplamiento de modelos eulerianos-lagrangianos para el estudio del transporte de sedimentos en la interacción océano-continente. Aplicación a regiones costeras del Golfo de México", UNAM, Tesis Doctoral

Lee, J.J. (1971) "Wave-induced oscillations in harbors of arbitrary geometry", Jour. Fluid Mech., Vol. 45, pp. 375-394

Maa, J., Maa, M.H., Li, C., and He, Q. (1997) "Using the gaussian elimination method for large banded matrix equations", Special scientific report Num. 135, Virginia Inst. Of Marine Science.

Panchang, V. and Pearce, B. (1991) "Solution of mild-slope wave problem by iteration", Jour. Applied Ocean Research, Vol. 13, pp. 187-200

Unluate, U. and Mei, C.C. (1973) "Long wave excitation in harbors an analytical study", Rep. Num. 171, Parson Lab. MIT, Cambridge, Mass.